MD 7 Notacja $O()$

Definicje:

$f = O(g)$ jeśli $(\exists C > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)\ f(n) \leqslant C \cdot g(n)$

$f = \Omega(g)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g = O(f)$

$f = \Theta(g)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g = O(f)$ i $f = O(g)$

7.1 Pokazać, z definicji.

a) $n^5 - n^3 + n + 3 = O(n^5)$,

b) $\sqrt{n^2 + n + 1} = O(n)$,

c) $\sqrt{\sqrt{n^6 + n} + n} = O(n^{3/2})$,

d) $(n + a)^2 = \Theta(n^2)$ dla $a \in \mathbb{R}$.

7.2 Wykazać, że:

a) $n! = O(n^n)$,

b) $4^{\lg_2 n} = \Omega(2^{\lg_2 n})$,

c) $(n + 1)! = \Omega(n!)$.

d) $\lg_2(n!) = \Theta(n \lg_2 n)$,

7.3 Wstawić Θ lub Ω lub O, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Odpowiedź uzasadnić.

a) $\ln(\ln n) = \ldots((\ln n)^{\ln n})$

b) $2^{\lg_2 n} = \ldots(2^{\ln n})$

c) $\ln(n^{\ln n}) = \ldots((\ln n)^{\ln n})$

d) $2^{2^n} = \ldots(n^n)$,

e) $\ln(n^n) = \ldots((\ln(n))^n)$,

f) $\lg_2(n + 1) = \ldots(\ln(n^2))$,

g) $5^{lg_2(n)} = \ldots 2n + 3$,

h) $n^{\sqrt{n}} = \ldots(\sqrt{n})^n$,

i) $n^{\ln(c)} = \ldots c^{\ln(n)}$, gdzie c jest pewną stałą.

j) $n^{\ln n} = \ldots(\ln n)^n$

7.4 Uporządkować podane funkcje według rosnących rzędów. Wypisać klasy następujące relacji równoważności f i g są ze sobą w relacji wtedy i tylko wtedy gdy $f = \Theta(g)$:

a) 2^n, $2\ln n$, $100n^2$, $0,01n^5$, 5^n, $\ln n$,

b) $51n + 101$, $\frac{n^3}{7\ln^7 n}$, $\frac{n^2+2}{\ln n}$, $(\sqrt{n} + 1)^3$, $\frac{\ln n}{n}$, $\frac{n}{\ln n}$,

c) 2^{2^n}, $\ln^2(n)$, $5n\lg_2 n$, n^n, $\lg_2(n^n)$, $(\lg_2 n)^n$, $(n + 1)^2$, $\ln(\ln(n))$, $n^{\ln(n)}$.