

## MDI 9 - Grafy

9.1 Znaleźć wszystkie nieizomorficzne grafy o 4 wierzchołkach.

9.2 Czy istnieją grafy o następujących ciągach stopni wierzchołków :

- a) (5,4,2,2,1,1),      b) (4,4,4,3,3,3),  
c) (2,2,1,1,1,1),      d) (5,5,4,4,2,2),  
e) (7,7,7,3,3,3,2,2),      f) (7,7,4,4,3,3,2,2) ?

9.3 Czy każde dwa grafy o tym samym ciągu stopni są izomorficzne?

9.4 Graf o 21 krawędziach ma 7 wierzchołków stopnia 1, 3 wierzchołki stopnia 2, 7 wierzchołków stopnia 3, a pozostałe wierzchołki mają stopień 4. Ile wierzchołków ma ten graf? Narysuj go.

9.5 Czy istnieje graf 5-regularny o 11 lub 12 wierzchołkach? Pokazać przykład.

9.6 Narysuj wszystkie grafy kubiczne (3-regularne) o co najwyżej 8 wierzchołkach.

9.7 Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej  $t$  istnieje graf 3-regularny o  $n = 6t$  wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego trójkąta.

9.8 Pokazać, że wśród  $n$  osób ( $n \geq 2$ ) istnieją takie dwie osoby, które znają tę samą liczbę osób (w tej grupie). Zakładamy, że relacja znajomości jest symetryczna tzn. osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy gdy osoba B zna osobę A.

9.9 **Dopełnieniem grafu**  $G$  nazywamy graf  $\bar{G} = (V(G), \bar{E})$ , gdzie  $\bar{E} = P_2(V(G)) - E(G)$ . Pokazać, dla dowolnego grafu  $G$  graf  $G$  jest spójny lub graf  $\bar{G}$  jest spójny.

9.10 Graf nazywamy **samodopełniającym** jeśli  $G \cong \bar{G}$ . Podaj przykłady grafów samodopełniających o 4, 5, 6, 7, 8 i 9 wierzchołkach.

9.11 Wykazać, że liczba wierzchołków w grafie samodopełniającym jest postaci  $4k$  lub  $4k + 1$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną.

9.12 Udowodnij, że jeśli dwa różne cykle w grafie  $G$  zawierają tę samą krawędź  $e$ , to w grafie  $G$  istnieje cykl nie zawierający  $e$ .

9.13 Pokazać, że jeśli  $G$  jest grafem dwudzielnym (czyli można jego wierzchołki podzielić na dwa zbiory  $X$  i  $Y$  tak, że każda krawędź łączy wierzchołek z  $X$  z wierzchołkiem z  $Y$ ) to  $e(G) \leq \frac{n^2}{4}$ .

9.14 Wykazać, że w grupie 6 osób zawsze znajdą się trzy osoby, które albo znają się nawzajem albo żadna z nich nie zna dwóch pozostałych.

9.15 Pokazać, jeśli  $e(G) > \binom{n-1}{2}$  to graf  $G$  jest spójny.

9.16 Pokazać, jeśli  $\delta(G) > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$  to  $G$  jest spójny.

9.17 Pokazać, jeśli  $\delta(G) \geq 2$  to  $G$  zawiera cykl.

9.18 Czy prawdziwe jest stwierdzenie : jeśli

$$\forall v \in V(G) \deg(v) \geq 2$$

i jest parzysty to każdy wierzchołek należy do pewnego cyklu ?

9.19 Pokazać,  $\delta(G) \leq \frac{2e(G)}{n} \leq \Delta(G)$ .