Egzamin końcowy z Analizy Funkcjonalnej.

Zasady ogólne.

- W przypadku, kiedy student kilka razy podchodzi do egzaminu, do oceny ostatecznej liczy się podejście najlepsze. Zasady wyliczania oceny ostatecznej są podane w konspekcie, a skalę ocen podaję na końcu.
- W przypadku naruszenia przez studenta reguł podanych przez Dziekana, przeze mnie, lub wynikających z ogólnie przyjętych zasad godziwego postępowania, nastąpi zawieszenie całego regulaminu zaliczenia w stosunku do takiego studenta, któ ry zachowa jedynie prawo do egzaminu ustnego z całości materiału.
- Egzamin końcowy będzie się składał z trzech pytań: o twierdzenie, zagadnienie i przykład. Będzie oceniony w skali (0-50), z czego 20 przypada na przykłady (po 10 na każdy), a po 15 na pozostałe pytania.
- Część pisemna obejmować będzie przykłady, a część ustna pozostałe pytania. Wynik egzaminu wyrazi się sumą wyniku z pisemnego i następującego po nim egzaminu ustnego. Jeśli student rezygnuje z niektórych terminów ustnego, to z pisemnego liczy się najlepszy wynik od czasu poprzedniego podejścia do ustnego.

Uwagi szczegółowe. Bardzo dobra odpowied"z na pytanie pierwsze będzie polegała na podaniu sformułowania twierdzenia oraz szczegółowego dowodu.

W zagadnieniach chodzi o zbadanie szerokości, a niekoniecznie głębi, wiedzy studenta. W części egzaminu dotyczącej zagadnień zadam trzy proste dotyczące podanych zagadnień, być może każde innego, oczekując odpowiedzi zwięzłych, precyzyjnych i bez dowodu, chociaż mogę spytać “A z jakiego twierdzenia to wynika?”. Przykłady podane będą w formie zadaniowej.

Twierdzenia.

1. Zupełność przestrzeni $L_p(X, \mu, \mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$.
2. Twierdzenie o operacji otwartej.
3. Twierdzenie Hahna-Banacha na przestrzeniach rzeczywistych.

4. Twierdzenie Ascoliego-Arzeli.
5. Twierdzenie Riesza o widmie operatora zwartego (+**3p.**) *lub* twierdzenia o rezolwencie i widmie operatora ograniczonego (**-4p.**).
6. Twierdzenie Radona-Nikodyma dla miar skończonych.

Zagadnienia.

1. Operatory dualne (z daszkiem) i sprzeżone (z gwiazdką) - definicja i podstawowe własności.
2. Operatory ograniczone: norma operatorowa, przestrzenie $B(X, Y)$, własności widmowe na przestrzeni Hilberta w tym widmo liczbowe i widmo operatora normalnego.
3. Odwracalność - definicja, twierdzenia o odwracalności, wzór Neumanna, także warunki odwracalności na przestrzeniach Hilberta i widmo operatora odwrotnego.
4. Operatory zwarte.
5. Rzuty ortogonalne i dopełnienia ortogonalne w przestrzeniach z iloczynem skalarnym, szeregi Fouriera i ich zbieżność
6. Definicja i twierdzenia o przestrzeniach dualnych (np. Riesza-Frécheta, dualnosc L_p i L_q), refleksywność, zbieżność słaba i słaba z gwiazdką.

Przykłady.

1. Normy na przestrzeniach liniowych, ich równoważność i zupełność, związek majoryzacji norm z ograniczonością operatorów
2. Operatory ograniczone - zbieżność silna i w normie operatorowej, odwracalność, operatory sprzężone na przestrzeni Hilberta.
3. Widma operatorów ograniczonych - korzystanie z własności, wyznaczanie, odwzorowanie spektralne
4. Przykłady i własności operatorów zwartych, w tym Hilberta-Schmidta.

5. Różne rodzaje zbieżności na przestrzeniach unormowanych: w normie, słaba, słaba z gwiazdką, związek z refleksywnością.

6. Zwartość w przestrzeniach funkcyjnych - przykłady zastosowań twierdzeń Ascoliego-Arzeli i Banacha-Alaoglu.

Skala ocen. Jeśli chodzi o sposób wyliczenia punktacji końcowej w skali 0-200, to proszę sprawdzić w konspekcie. Skala ocen będzie się przedstawiała następująco:

100-124 dostatecznie,

125-139 dostatecznie plus,

140-154 dobrze,

155-169 dobrze plus,

170- bardzo dobrze

Życzę powodzenia,
Grzegorz Świątek
dn. 25 kwietnia 2024