

# Dynamika modeli matematycznych

Grzegorz Świątek

**Podziękowanie.** Dziękuję mgr. Grzegorzowi Siudemowi oraz studentom Wydziału MiNI Konradowi Kisielowi i Annie Sztyber za zaprojektowane i wykonane przez nich ilustracje.

## 1 Podstawowe pojęcia i przykłady.

Są dwa sposoby matematycznego zadania dynamiki. Pierwszy z nich polega na przyjęciu pewnego przekształcenia przestrzeni  $M$  w siebie, nazwijmy je  $f$ , za generator dynamiki. Dziedzina dynamiki, czyli w naszym przykładzie  $M$ , nazywa się *przestrzenią fazową*. Wówczas  $f$  zadaje ewolucję przestrzeni fazowej po jednostce czasu. Tak więc studiowanie dynamiki sprowadza się do składania  $f$  z sobą. O ile przekształcenie  $f$  jest odwracalne, można także brać iteracje funkcji odwrotnej, co odpowiada modelowaniu ewolucji układu wstecz w czasie. Klasycznym przykładem jest rodzina logistyczna:  $f_a(x) = ax(1 - x)$ , gdzie  $0 < a \leq 4$  jest parametrem. Przestrzenią fazową jest odcinek  $[0, 1]$ . Rodzina ta modeluje dynamikę populacji, której tempo wzrostu jest ujemnie skorelowane z rozmiarem populacji, np. wskutek ograniczeń wynikających z zasobów środowiska. Przy  $a > 1$ , dla małych wartości  $x$  obserwujemy wzrost wykładniczy. Jednak przy większych wartościach  $x$  wzrost ten ulega spowolnieniu, a wreszcie zahamowaniu kiedy maksymalna wartość zostaje uzyskana dla  $x = \frac{1}{2}$ . Tego typu modele nazywamy *układami z czasem dyskretnymi*, ponieważ możemy je obserwować w dyskretnych odstępach czasu. Wykresy trzech pierwszych iteracji pewnego przekształcenia z rodziny logistycznej są przedstawione na Rysunkach 1-3.

Sposób drugi jest podobny tyle, że generator jest infinitezymalny. Jest nim pewne pole wektorowe  $F(x)$ . Musimy także założyć, że zbiór  $M$  ma strukturę umożliwiającą różniczkowanie, a więc jest przestrzenią euklidesową, a ogólniej rozmaitością różniczkowalną. O ile pole  $F$  jest dostatecznie gładkie,

co najmniej klasy  $C^1$ , to z teorii równań różniczkowych wiadomo, że generuje ono *potok*, a więc rodzinę przekształceń  $\phi^t(x)$  określoną na dziedzinie  $F$ . Tutaj  $\phi^t$  opisuje zmianę układu po czasie  $t$  i, jak należało oczekiwać, spełnione jest prawo działania grupy  $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$ . Potok jest zawsze odwracalny i pozwala studiować układ wstecz w czasie. W niniejszym cyklu wykładów skoncentrujemy się na potokach, zwanych także *układami z czasem ciągłym*.

**Orbity i portrety fazowe.** Zbiór obrazów punktu  $x$  pod działaniem dynamiki określa się jako jego *orbitę*. Zatem będzie to zbiór  $\{f^n(x) : n \geq 0\}$  dla układów z czasem dyskretnym i  $\{\phi^t(x) : t \geq 0\}$  dla potoków. *Portretem fazowym* nazywamy wykres wszystkich orbit potoku. Rzecz prosta, portret fazowy jest niemożliwy do faktycznego wykreślenia, zatem przez “narysowanie portretu fazowego” rozumiemy naszkicowanie wystarczająco wielu orbit tak, iż przebieg pozostałych można wywnioskować w przybliżeniu. *Diagram fazowy* jest podobny do portretu fazowego i dodatkowo zaznacza kierunek ruchu po trajektoriach za pomocą strzałek.

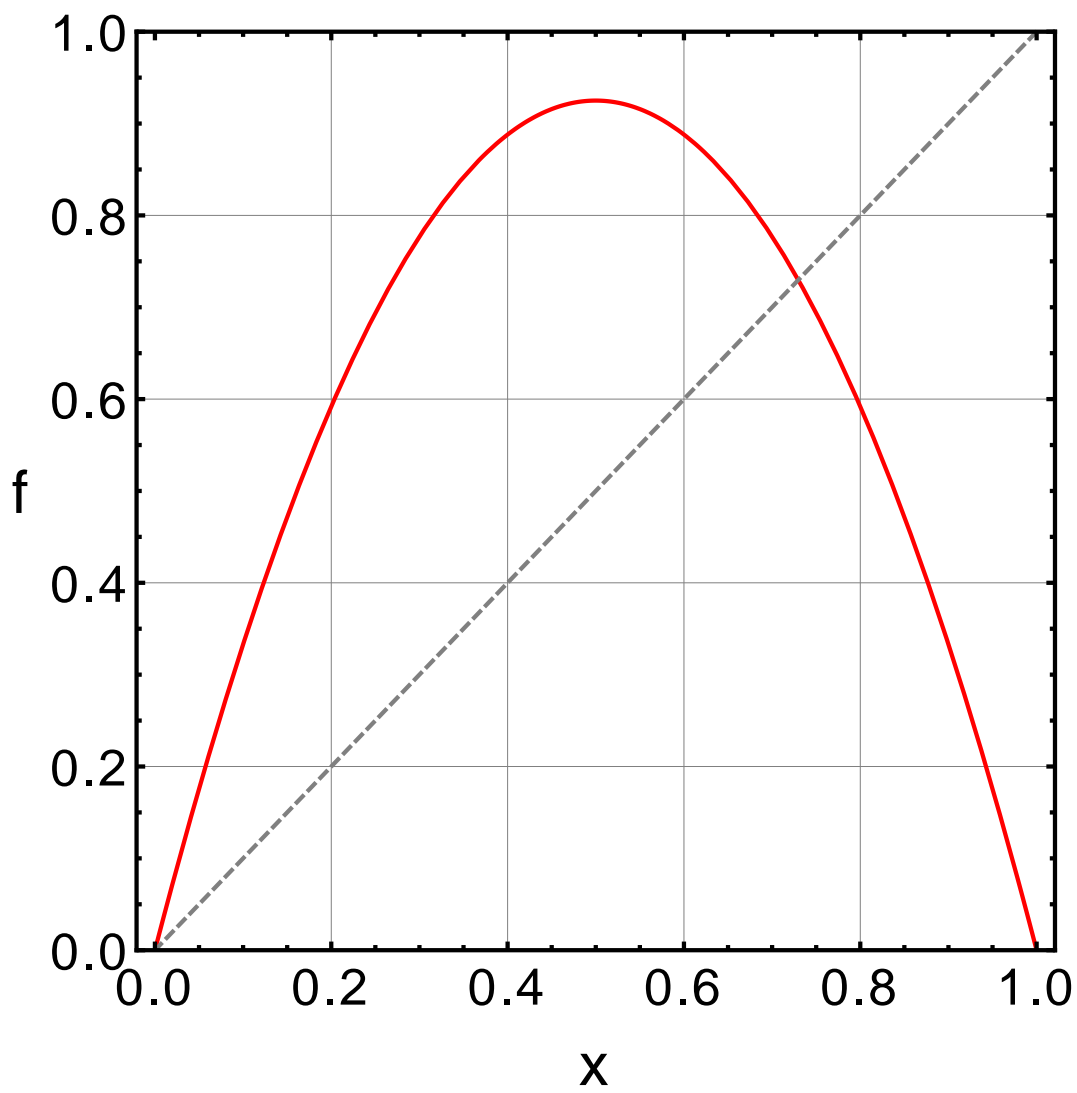
## 1.1 Punkty stałe.

Najprostszym podejściem do badania ewolucji układu jest znalezienie jest punktów równowagi, zwanych też punktami stałymi. Dla potoku, sprowadza się to rozwiązanie równania  $F(x) = 0$ . Jednak z punktu widzenia zachowania modelu, dostrzegamy od razu różne możliwości zachowania układu przy lekkim zaburzeniu położenia równowagi, a podstawową cechą różnicującą jest stabilność.

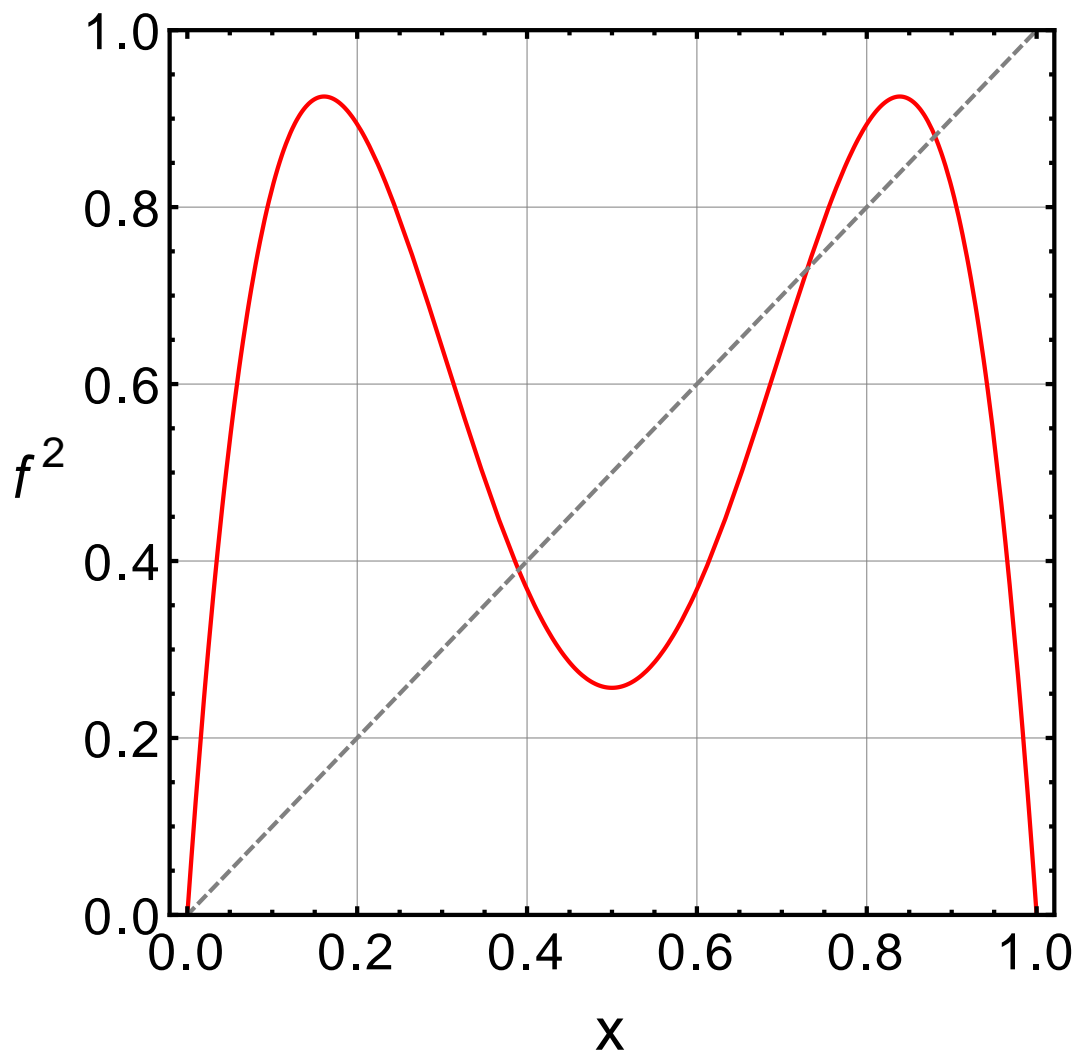
**Definicja 1.1** *Orbita  $y$  jest stabilna, niekiedy dodajemy w sensie Lapunowa, jeśli  $\phi^t(x)$  jest określone dla wszystkich  $t$  dodatnich i wszystkich  $x$  z pewnego otoczenia otwartego  $y$  oraz dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że jeśli  $\|x - y\| < \delta$ , to dla wszystkich dodatnich  $t$  zachodzi  $\|\phi^t(x) - \phi^t(y)\| < \epsilon$ .*

**Definicja 1.2** *Powiemy, że orbita  $x$  jest asymptotyczna do orbity  $y$ , jeśli  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi^t(x) - \phi^t(y)\| = 0$ .*

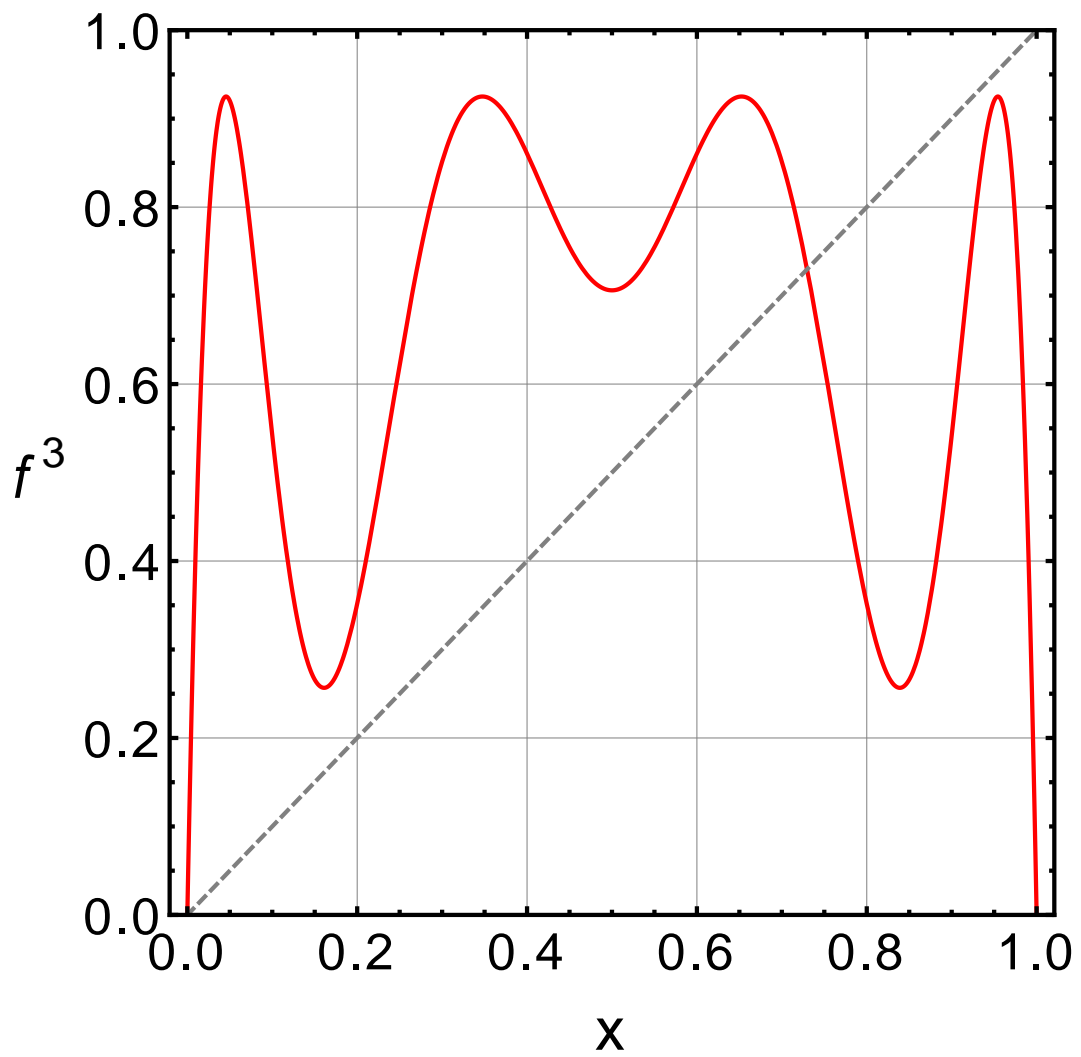
**Definicja 1.3** *Punkt  $y$  nazywa się asymptotycznie stabilnym, niekiedy także przyciągającym, jeśli jest stabilny i każda orbita  $x$  dla  $x$  z pewnego otoczenia otwartego  $y$  jest asymptotyczna do  $y$ . Z kolei, jeśli  $y$  ma takie otoczenie*



Rysunek 1: Wykres funkcji logistycznej dla  $a=3.7$ .



Rysunek 2: Wykres drugiej iteracji funkcji logistycznej dla  $a=3.7$ .



Rysunek 3: Wykres trzeciej iteracji funkcji logistycznej dla  $a=3.7$ .

otwarte  $U$ , że dla każdego  $x \in U$ ,  $x \neq y$  istnieje  $\tau > 0$  takie, że  $\phi^\tau(x) \notin U$ , to punkt  $y$  nazwiemy odpychającym.

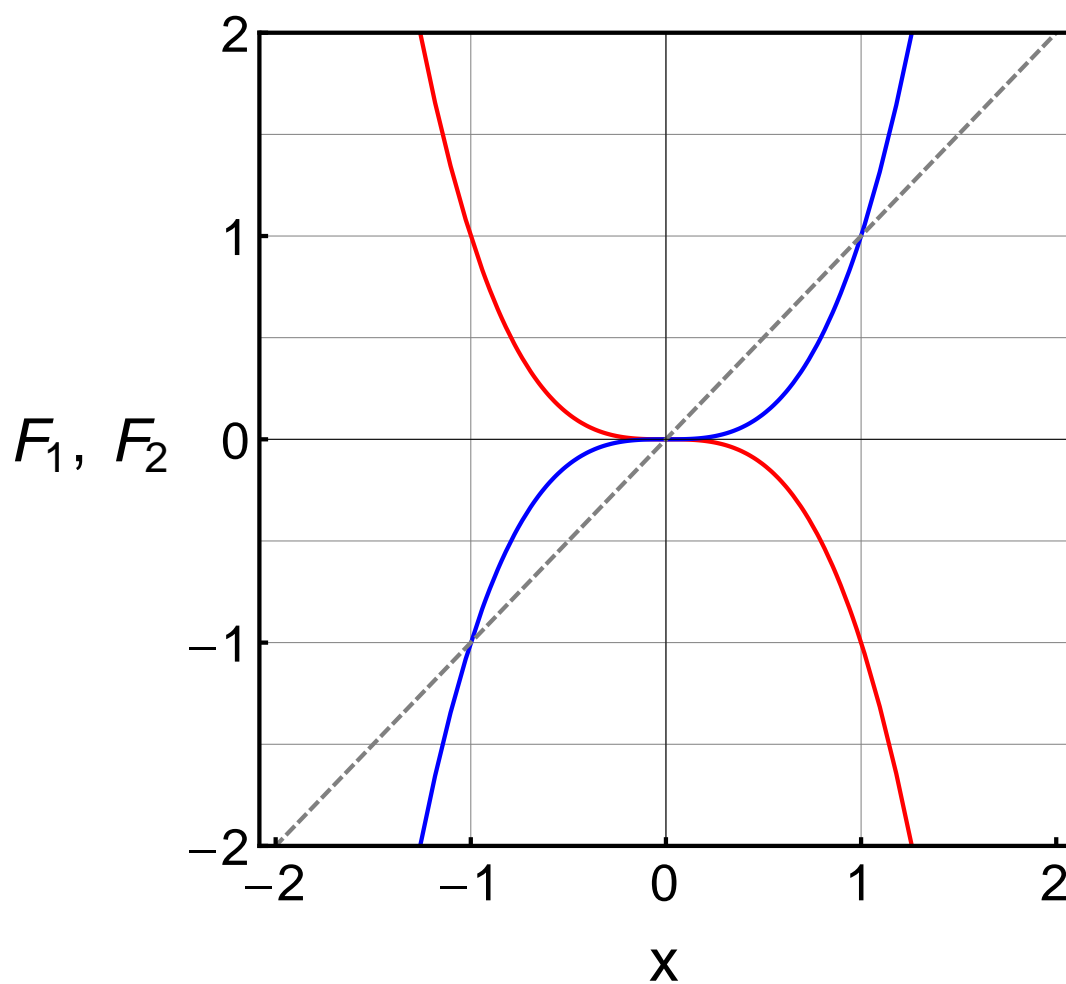
Nietrudno przekonać się, że punkt odpychający jest niestabilny, a dla potoków  $y$  jest odpychający wtedy i tylko wtedy, gdy jest asymptotycznie stabilny dla potoku z czasem odwróconym:  $\psi^t = \phi^{-t}$ .

**Linearyzacja i hiperboliczność.** Jeśli potok jest liniowy, wtedy funkcja  $F$  jest liniowa, czyli zadana pewną macierzą  $A$ , to jedynym punktem równowagi jest  $0$  i nietrudno ustalić jego stabilność znając widmo  $F$ . Stabilność mamy wtedy i tylko wtedy, gdy części rzeczywiste wszystkich wartości własnych są niedodatnie, a dla czysto urojonych wartości własnych nie występują nietrywialne klatki Jordana, tj. jeśli  $\lambda$  jest urojoną wartością własną, to zachodzi  $(A - \lambda E)^2 v = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $(A - \lambda E)v = 0$ , czyli  $v$  jest wektorem własnym. Asymptotyczna stabilność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy części rzeczywiste wszystkich wartości własnych są ujemne.

Stąd naturalnym podejściem jest *linearyzacja*, to znaczy przybliżenie potoku w pobliżu punktu równowagi w  $y$  przez potok liniowy zadany macierzą pochodnych cząstkowych  $DF(y)$ . Oczekiwać by można, że zachowanie obu potoków będzie “podobne” i w szczególności stabilność położenia równowagi w  $0$  dla potoku zlinearyzowanego i w  $y$  dla potoku wyjściowego powinna być taka sama. Czy jednak tak jest w istocie? Łatwo o kontrprzykład i to w najprostszej sytuacji, gdy  $M = \mathbb{R}$ . Weźmy  $F_1(x) = -x^3$  oraz  $F_2(x) = x^3$  (zob. Rysunek 4.) W obu przypadkach linearyzacją jest potok trywialny generowany przez pole zerowe. Położenie równowagi w  $0$  jest stabilne, lecz nie asymptotycznie stabilne. Z drugiej strony obserwujemy, że  $F_1$  jest ujemne dla  $x$  dodatnich, a dodatnie dla  $x$  ujemnych. Wobec tego wszystkie orbity będą monotonicznie dążyły do  $0$ , które jest dla  $F_1$  asymptotycznie stabilne. Całkiem odwrotnie rzecz się ma dla  $F_2$ , dla którego wszystkie orbity za wyjątkiem  $0$  dążą do plus lub minus nieskończoności, co czyni punkt równowagi niestabilnym. Problem polega tu na tym, że istnieje wartość własna  $0$  o zerowej części rzeczywistej.

**Definicja 1.4** *Punkt równowagi potoku  $y$  nazywa się hiperbolicznym wtedy i tylko wtedy, gdy macierz  $DF(y)$  nie ma wartości własnych o zerowej części rzeczywistej.*

Zachodzi wtedy twierdzenie Grobmana-Hartmana:



Rysunek 4: Wykresy funkcji  $F_1(x) = x^3$  (niebieska) i  $F_2(x) = -x^3$  (czerwona).

**Twierdzenie 1.1** *Jeśli  $y$  jest hiperbolicznym punktem równowagi,  $\psi^t$  oznacza potok zlinearyzowany, to istnieje homeomorfizm  $H$  z pewnego otoczenia otwartego  $U \ni y$  na otoczenie otwarte  $0$  taki, że*

$$H \circ \phi^t(x) = \psi^t \circ H(x),$$

*dla każdego  $t$ , również ujemnego, o ile tylko dla każdego  $\tau$  spomiędzy  $0$  a  $t$  zachodzi  $\phi^\tau(x) \in U$ .*

W szczególności cechy stabilności obu punktów równowagi są takie same.

## 1.2 Rozmaitości stabilne i niestabilne.

Jeśli potok jest liniowy i  $0$  jest hiperbolicznym punktem równowagi, to rozważmy *podprzestrzeń stabilną*  $V^s$  rozpiętą przez uogólnione wektory własne odpowiadające wartościom własnym z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Z dynamicznego punktu widzenia,

$$V^s = \{x : \lim_{t \rightarrow \infty} \psi^t(x) = 0\}.$$

W szczególności,  $V^s$  jest podprzestrzenią niezmienniczą, tzn. dla każdego  $t > 0$  zachodzi  $\psi^t(V^s) = V^s$ .

Punkty, których orbity uciekają do nieskończoności, to całe dopełnienie  $V^s$  a więc nie tworzą one podprzestrzeni. *Podprzestrzeń niestabilną* definiujemy zatem inaczej, jako rozpiętą przez uogólnione wektory własne należące do wartości własnych o dodatnich częściach rzeczywistych, lub dynamicznie poprzez

$$V^u = \{x : \lim_{t \rightarrow -\infty} \psi^t(x) = 0\}.$$

Sytuacja przedstawia się podobnie dla hiperbolicznego położenia równowagi  $y$  potoku nieliniowego.

**Definicja 1.5** *Niech  $y$  będzie hiperbolicznym punktem stałym. Wybierzmy  $r > 0$ . Można wówczas zdefiniować*

$$W_r^s = \{x \in M : \forall t \geq 0 \|\phi^t(x) - y\| < r\}$$

*oraz*

$$W_r^u = \{x \in M : \forall t \leq 0 \|\phi^t(x) - y\| < r\}.$$

Zachodzi wówczas następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1.2** *Dla każdego dostatecznie małego  $r$ , zbiory  $W_r^s$  i  $W_r^u$  są podrozmaitościami zanurzonymi w  $M$ , a ich przestrzeniami stycznymi w  $y$  są odpowiednio  $V^s$  i  $V^u$ . Jeśli  $0 < \hat{r} < r$ , to oczywiście  $W_{\hat{r}}^s \subset W_r^s$ , ale także zachodzi równość po pocięciu do pewnego otoczenia  $y$ . Dodatkowo, każdy punkt  $W_r^s$  jest asymptotyczny do  $y$ , a każdy punkt  $W_r^u$  asymptotyczny do  $y$  wstecz w czasie.*

W przypadku, gdy  $M$  jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^m$ , “podrozmaitość zanurzona” wymiaru  $k \leq m$  oznacza zbiór, który w otoczeniu każdego należącego doń punktu zadany jest wykresem pewnej funkcji klasy  $C^1$  o wartościach ew  $\mathbb{R}^k$ , której różniczka ma rząd  $k$  w tym punkcie.

Będziemy zatem pisać  $W_{loc}^s = W_r^s$  dla  $r$  dobranego z Twierdzenia 1.2, analogicznie dla  $W_{loc}^u$ . Z definicji lokalna rozmaitość stabilna  $W_r^s$  jest niezmiennicza w przód: dla  $t > 0$  zachodzi  $\phi^t(W_{loc}^s) \subset W_{loc}^s$ . Podobnie, lokalna rozmaitość niestabilna jest niezmiennicza w tył. Definiujemy teraz ich globalne odpowiedniki.

**Definicja 1.6** *Globalną rozmaitością stabilną punktu  $y$ , oznaczaną  $W^s$  lub  $W^s(y)$ , nazwiemy zbiór*

$$W^s = \{x \in M : \exists t \in \mathbb{R} \phi^t(x) \in W_{loc}^s\}.$$

*Analogicznie, globalną rozmaitość niestabilną definiujemy poprzez*

$$W^u = \{x \in M : \exists t \in \mathbb{R} \phi^t(x) \in W_{loc}^u\}.$$

Tak zdefiniowane rozmaitości globalne są już w pełni niezmiennicze, to znaczy zarówno w przód, jak i w tył w czasie. Nazywa się je wobec tego *rozmaitościami niezmienniczymi* punktu  $y$ . Rozmaitości niezmiennicze są łącznikiem między lokalną teorią punktów równowagi, a więc pojęciami takimi jak linearyzacja, które siłą rzeczy mogą działać tylko w małym otoczeniu takiego punktu, a globalną dynamiką. Można by je obrazowo przyrównać do macek, którymi punkty równowagi sięgają daleko w całą przestrzeń fazową. Jest oczywiście atut dla badacza, ponieważ punkty równowagi wraz z ich lokalnymi rozmaitościami niezmienniczymi są nietrudne do policzenia.

### 1.3 Równanie Lotki-Volterry.

Rozważmy teraz konkretny model konkurujących populacji. Jest on zadany układem równań Lotki-Volterry:

$$\frac{dx}{dt} = x(K - x - ay) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(L - y - bx) \quad (2)$$

z dodatnimi stałymi  $a, b, K, L$ .  $x$  oraz  $y$  są licznosciami odpowiednich populacji. Widzimy latwo, że pierwsza ćwiartka jest zbiorem niezmienniczym, ograniczymy się zatem do jej badania jako realistycznego zakresu modelu. Model jest jakościowo symetryczny ze względu na obie populacje, przeanalizujemy go więc z punktu widzenia igrów. W optymalnych warunkach igrów namnażają się wykładniczo w stosunku  $K$ . Jednak hamulcem do tego rozwoju okazuje się ich własny przyrost, jak i konkurencja ze strony igrów, reprezentowane przez ujemne człony po prawej stronie pierwszego równania. Mogą one wręcz odwrócić znak pochodnej doprowadzając do wymierania igrów.

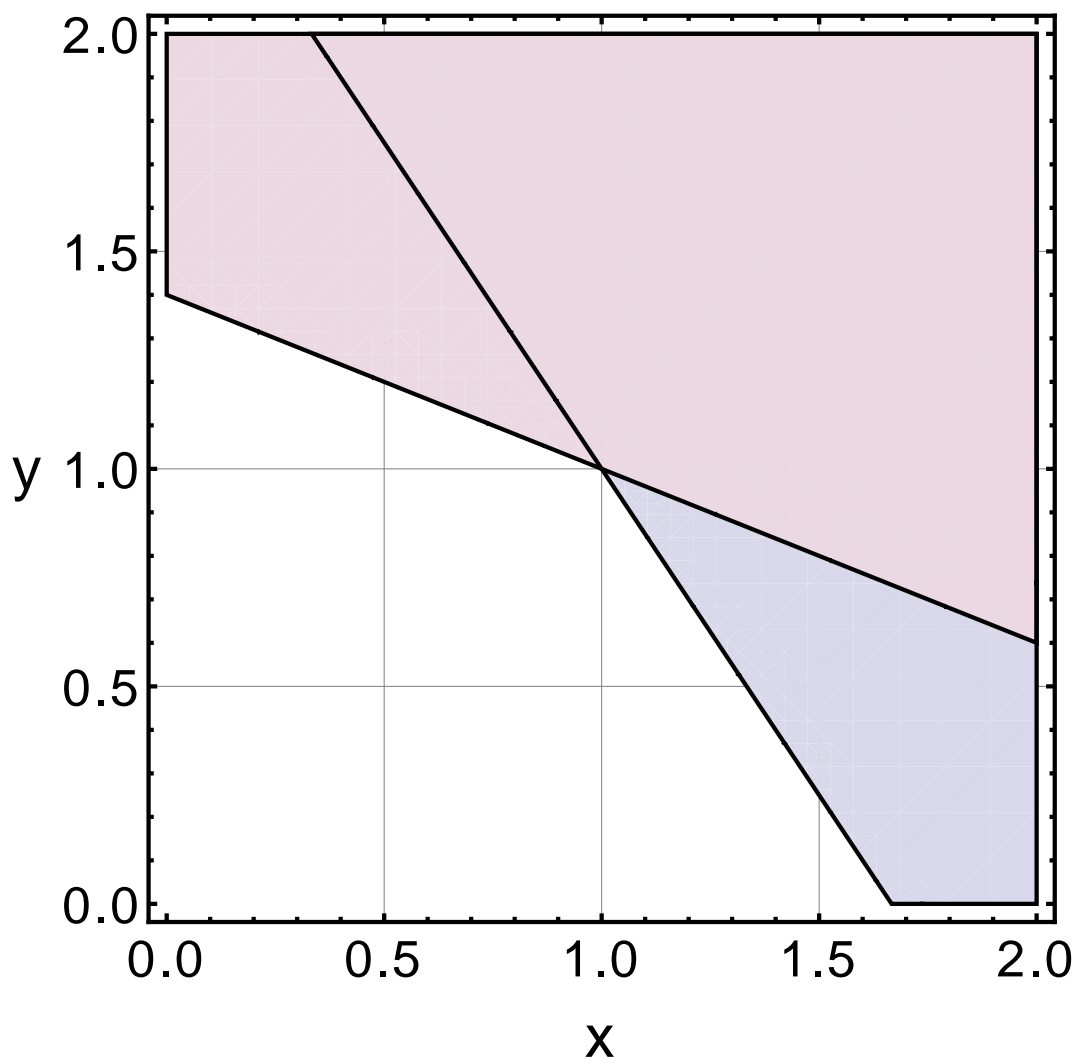
Widać od razu, że pożyteczne będzie podzielić przestrzeń fazową na obszary w zależności od znaku pochodnej licznosci populacji. Podział ten wyznaczają krzywe  $\frac{dx}{dt} = 0$  i  $\frac{dy}{dt} = 0$ . Takie krzywe nazywają się ogólnie *izoklinami*, a w tym przypadku są prostymi:

$$x + ay = K \quad (3)$$

$$bx + y = L. \quad (4)$$

Izoklinami są także osie współrzędnych, ale nie będziemy ich tak nazywać dla jasności dyskusji.

Każda z izoklin przecina obie osie współrzędnych w punktach dodatnich, a zatem przebiegają one przez wnętrze pierwszej ćwiartki. Od razu widzimy, że występują dwa przypadki generyczne, mianowicie izokliny mogą się przecinać we wnętrzu pierwszej ćwiartki, bądź pozostawać rozłączne w jej domknięciu. Przypadki niegeneryczne to takie, kiedy izokliny się pokrywają, bądź przecinają na brzegu pierwszej ćwiartki.



Rysunek 5: Izokliny równania Lotki-Voltery dla  $L = 2.5$ ,  $K = 3.5$ ,  $a = 2.5$ ,  $b = 1.5$ .

**Punkty równowagi na brzegu.** Przyjrzyjmy się punktom równowagi, które leżą w domknięciu pierwszej ćwiartki. Mamy przede wszystkim zawsze odpychający punkt w  $(0, 0)$ . Poza tym, są to punkty przecięcia izoklin z osiami. Jeśli na przykład  $y = 0$ , to

$$\frac{dx}{dt} = x(K - x) .$$

Tak więc  $x = K$  jest tu punktem równowagi przyciągającym w kierunku osi  $x$ . Aby ustalić jego stabilność w dwóch wymiarach, zlinearyzujemy drugie równanie w  $y = 0$  i  $x = K$ :

$$DF(\tilde{x}, 0) = \begin{pmatrix} -K & 0 \\ 0 & L - bK \end{pmatrix} . \quad (5)$$

Ale  $L/b$  to punkt przecięcia osi  $y = 0$  przez drugą izoklinę. Widzimy więc, że jego stabilność zależy od tego, czy druga izoklina przecina oś  $y = 0$  bliżej, czy dalej od 0, niż pierwsza. Jeśli bliżej, to punkt jest przyciągający, jeśli dalej, to jest siodłem. Analogicznie, z zamianą ról izoklin wygląda sprawa z punktem równowagi na osi  $x = 0$ .

Omówimy teraz szczegółowo oba przypadki generyczne przecinania się izoklin.

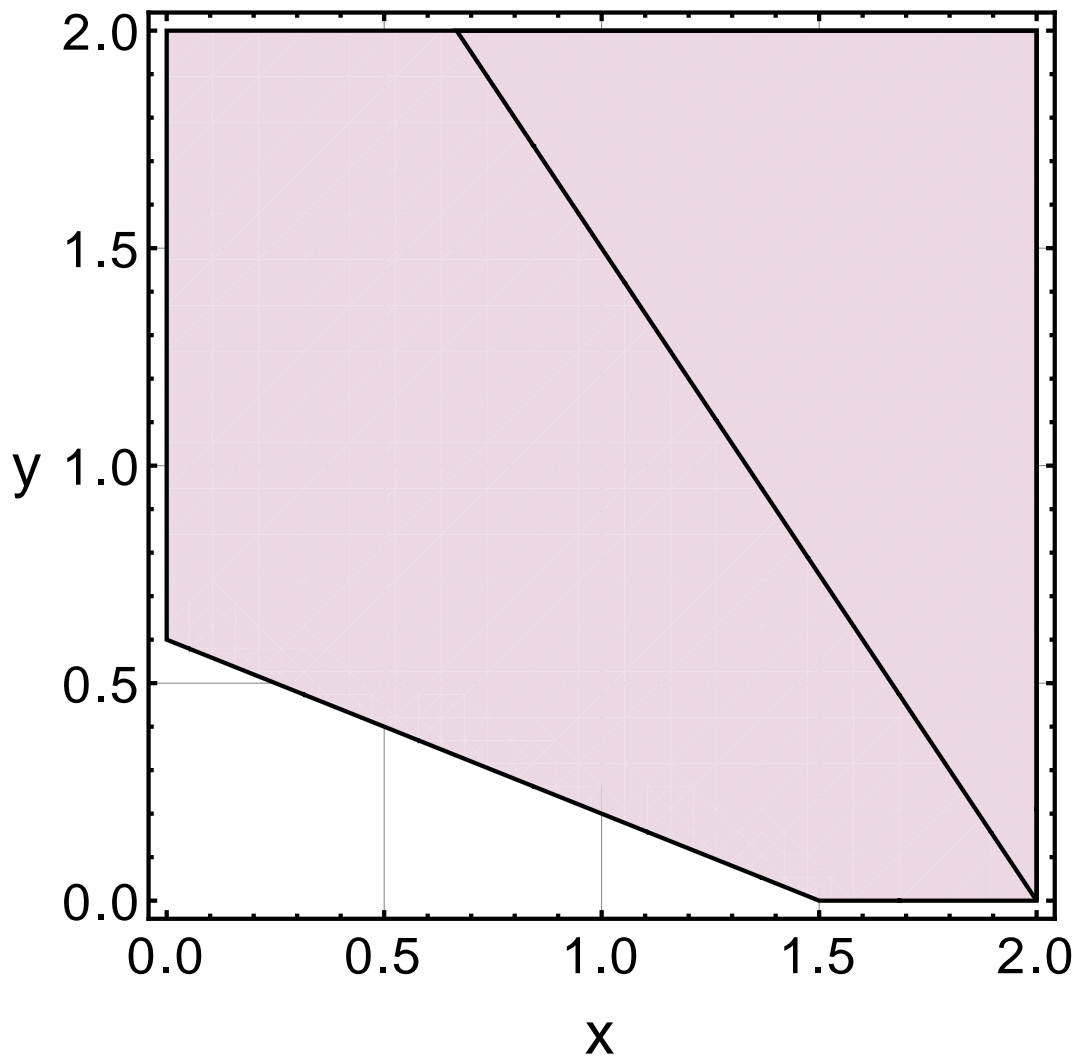
**Brak przecięcia.** W tym przypadku nie ma punktów równowagi wewnątrz pierwszej ćwiartki, a z punktów na brzegu jeden jest siodłem, a drugi punktem przyciągającym. Widać łatwo, że  $W_{loc}^s$  siódła jest zawarta w osi, to samo dotyczy  $W^s$ , a każdy punkt z wnętrza pierwszej ćwiartki dąży do punktu stałego przyciągającego. Mamy tu zatem sytuację, w której jedna z populacji eliminuje drugą, a słabsza może przetrwać tylko w nieobecności silniejszej. Sytuację ilustruje Rysunek 6. Diagram fazowy znajduje się na Rysunku 7.

**Przypadek z przecięciem.** Sytuację tę przedstawia Rysunek 5. Są tu tak naprawdę dwa podprzypadki. W pierwszym

$$L - Kb < 0 \quad (6)$$

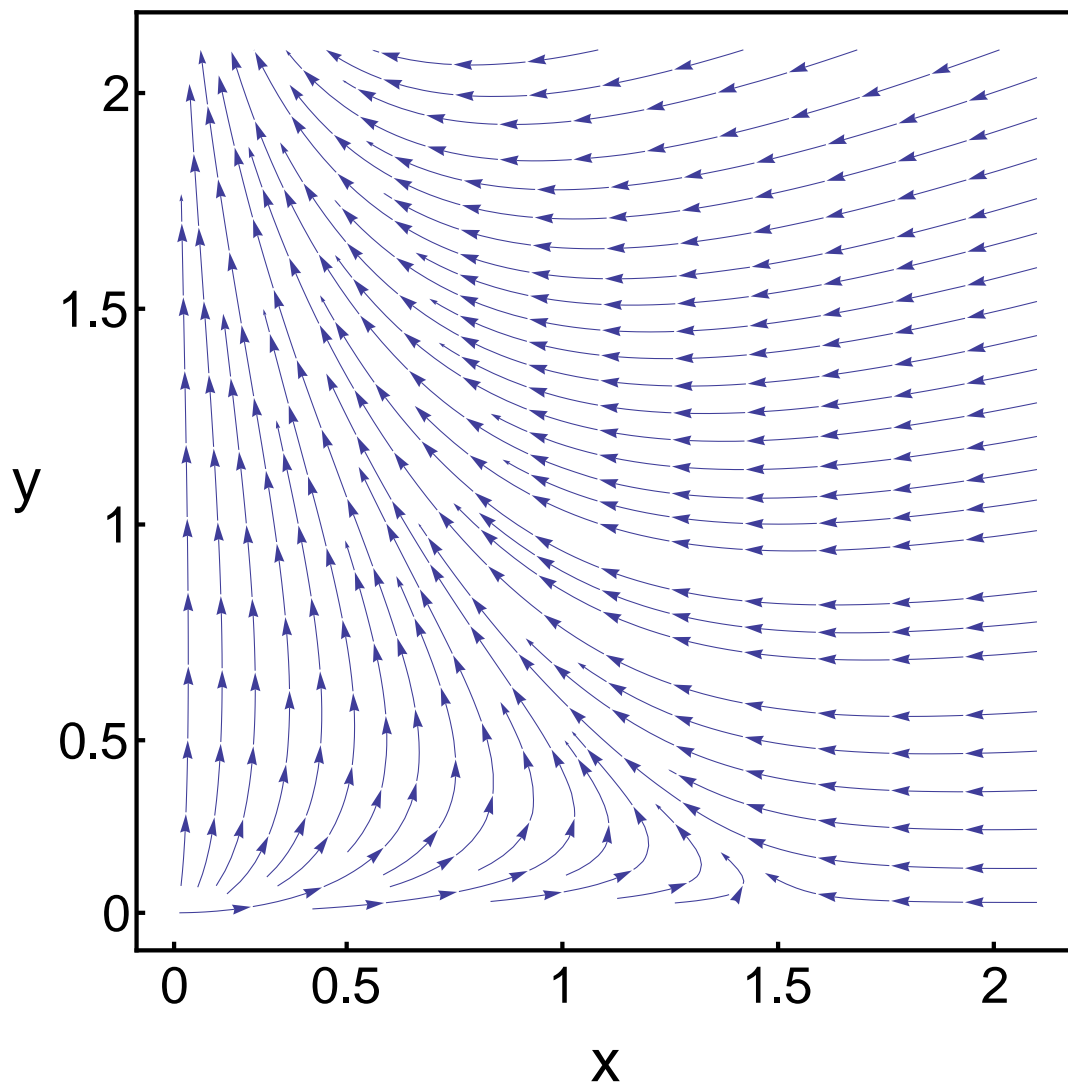
$$K - La < 0 \quad (7)$$

a oba punkty na brzegu są przyciągające. W drugim obie nierówności mają znak przeciwny i oba punkty na brzegu są siodłami.



$L = 3, K = 1.5, a = 2.5, b = 1.5$ .

Rysunek 6: Izokliny równania Lotki-Voltery dla  $L = 3, K = 1.5, a = 2.5, b = 1.5$ .



$L = 3, K = 1.5, a = 2.5, b = 1.5$  .

Rysunek 7: Diagram fazowy dla L-V ( $L = 3, K = 1.5, a = 2.5, b = 1.5$ ) -  
wyginięcie jednej z populacji.

W każdej sytuacji mamy punkt równowagi  $(\hat{x}, \hat{y})$  we wnętrzu pierwszej ćwiartki. Sprawdzamy bezpośrednio, że

$$DF(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} -\hat{x} & -a\hat{x} \\ -b\hat{y} & -\hat{y} \end{pmatrix}.$$

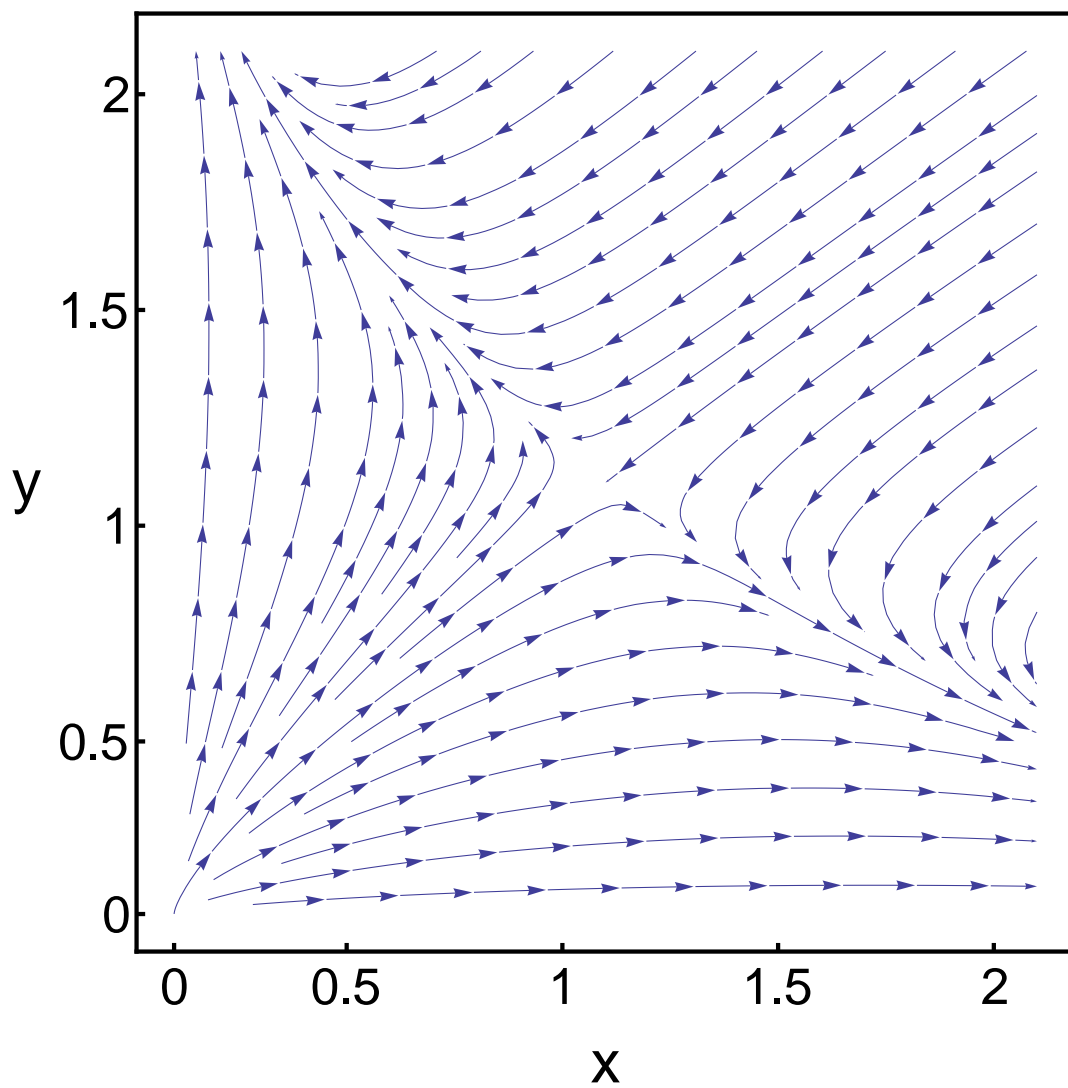
Jej wyznacznik to  $\hat{x}\hat{y}(1 - ab)$ . Z nierówności (6) i poniższej łatwo wnioskujemy, że  $ab > 1$ , a przypadku nierówności przeciwnych  $ab < 1$ . Jeśli zatem nierówność (6) i poniższa zachodzą, to wyznacznik macierzy linearyzacji jest ujemny, a stąd punkt  $(\hat{x}, \hat{y})$  jest siodłem. W tym przypadku każdy z asymptotycznie stabilnych punktów na brzegu przyciąga orbity z pewnego zbioru otwartego, a granicę między tymi “basenami przyciągania” stanowi rozmaitość stabilna  $W^s(\hat{x}, \hat{y})$ . W tym zatem przypadku również typowo jedna z populacji eliminuje drugą, ale zwycięzca nie jest z góry przesądzony. Zależy od warunków początkowych, a przy tym istnieje krzywa, po której populacje dążą do niestabilnego położenia równowagi. Diagram fazowy został przedstawiony na Rysunku (8).

Wreszcie mamy przypadek, kiedy nierówności (6) zachodzą z przeciwnymi znakami. Wówczas oba punkty równowagi na osiach są siodłami, zaś wyznacznik macierzy linearyzacji  $DF(\hat{x}, \hat{y})$  jest dodatni. Ponieważ ślad tej macierzy jest ujemny, punkt  $(\hat{x}, \hat{y})$  jest przyciągający. W tym zatem przypadku punkt  $(\hat{x}, \hat{y})$  jest stabilnym położeniem równowagi i przyciąga wszystkie orbity z wnętrza pierwszej ćwiartki. Żadnej z populacji nie grozi zatem wymarcie, ale będą dążyły do tego położenia równowagi.

## Ćwiczenia i laboratoria.

**Jeszcze raz Lotka-Volterra.** Uzupełnić dyskusję równania (1) biorąc pod uwagę następujące kwestie:

- Przedyskutować przypadki niegeneryczne.
- W przypadku, kiedy  $(\hat{x}, \hat{y})$  jest siodłem wyznaczyć komputerowo jest rozmaitość stabilną (powiedzmy dla paru wyborów parametrów).
- W przypadku, gdy punkt ten jest przyciągający, wyznaczyć rozmaitości niestabilne siodła na brzegu.



$L = 3, K = 1.5, a = 2.5, b = 1.5$ .

Rysunek 8: Diagram fazowy dla L-V ( $L = 2.5, K = 3.5, a = 2.5, b = 1.5$ ) -  
siodło

**Model epidemii.** Rozważmy model SIR propagacji epidemii niegroźnej dla życia choroby wśród narażonej populacji.  $S$  (susceptible) jest populacją narażoną, ale na razie zdrową,  $I$  (infected) chora, zaś  $R$  (recovered) odporną wskutek albo przebycia choroby, albo szczepienia przy narodzinach.  $K = S + I + R$ . Zakładamy odsetek urodzeń  $\mu$  w populacji  $K$ , z których  $p$  zostaje zaszczepionych. Odsetek śmierci jest także  $\mu$  i taki sam dla wszystkich populacji, natomiast  $\beta$  mierzy możliwość zarażenia przy kontakcie osobników z  $S$  i  $I$ . Wreszcie  $\gamma$  jest odsetkiem wyzdrowień. Wtedy dynamika populacji opisuje się układem równań:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= (1-p)\mu K - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= p\mu K + \gamma I - \mu R.\end{aligned}$$

Przeanalizować model ze względu na następujące zagadnienia:

- jeden z parametrów da się łatwo wyeliminować, który i jak,
- znaleźć punkty równowagi,
- policzyć linearyzację równania w tych punktach i określić stabilność w zależności od parametrów,
- przy użyciu komputera naszkicować izokliny i portret fazowy.

**Badanie wypadku lotniczego.** Z analizy rejestratorów lotu AF 447 (informacje te pochodzą z [www.bea.aero](http://www.bea.aero)), samolot osiągnął maksymalną wysokość  $38000\text{ft}$  (stóp nad poziomem morza), a w  $32\text{s}$  później był na wysokości  $35800\text{ft}$  opadając z prędkością pionową  $-9100\text{ft}/\text{min}$ . Przyjmuje się generalnie, że przyczyną opadania było aerodynamiczne przeciągnięcie samolotu, objawiające się spadkiem siły nośnej skrzydeł, które tylko częściowo dźwigały jego ciężar. Za model prędkości pionowej samolotu przyjmijmy równanie:

$$\frac{dv}{dt} = -cg + kv^2$$

gdzie  $0 < c \leq 1$  oddaje utratę siły nośnej wskutek przeciągnięcia, zaś  $k$  opór powietrza.

Wyliczyć te współczynniki.

Jeden z pilotów wspomniał o “zepsuciu się” przyrządu pokazującego prędkość opadania. Skala tego przyrządu kończy się na wartości  $-15000\text{ft}/\text{min}$ . Czy jest możliwe, że przyrząd działał prawidłowo, tylko wskazówka w pewnym momencie doszła do końca skali? W jakim momencie to by nastąpiło?

## 2 Całki pierwsze i funkcje Lapunowa

Wiadomo, że można obieć ruchem skoczka całą szachownicę 8 na 8 w ten sposób, że każde pole jest odwiedzone dokładnie raz i z ostatniego można powrócić do pola początkowego. Czy można w ten sam sposób obieć szachownicę 9 na 9? Zadanie pozornie skomplikowane okazuje się łatwe, kiedy dostrzeżemy, że kolor pola przy ruchu skoczka zmienia się co ruch. Zatem na standardowej szachownicy po 64 ruchach można wrócić na to samo pole, ale na szachownicy o 81 polach jest to niemożliwe. Jeśli  $k_n$  oznacza kolor pola po  $n$  ruchach, powiedzmy 1 dla czarnego i  $-1$  dla białego, to wielkość  $(-1)^n k_n$  pozostaje stała na każdej trajektorii skoczka. Taką wielkość nazywamy *niezmiennikiem* i wiele pięknych rozumowań w matematyce dyskretnej jest opartych na odpowiednio dobranym niezmienniku. Podobną metodę można zastosować także do badania dynamiki modeli. Wielkości będące niezmiennikami na trajektoriach potoku nazywają się *całkami pierwszymi*.

Niekiedy stosuje się także *półniezmienniki*, a więc wielkości zmieniające się w sposób monotoniczny, powiedzmy zawsze nierosnące. W teorii równań różniczkowych noszą one nazwę *funkcji Lapunowa*. Niekiedy wreszcie musimy się zadowolić wielkością, która nie jest nawet półniezmiennikiem, ale wciąż daje się coś powiedzieć w miarę prostego o tym, kiedy rośnie, a kiedy maleje. Odpowiednie funkcje “nie do końca Lapunowa” nazywają się skromnie *funkcjami testowymi*.

### 2.1 Całka pierwsza w badaniu układu Lotki-Volterra.

Układ Lotki-Volterra ma postać

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by) \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-c + ex) \quad (9)$$

z wszystkimi parametrami dodatnimi. Jest to przykład modelu drapieżnika i zdobyczy.  $x$  jest populacją zdobyczy, która rosłaby wykładniczo w nieobecności drapieżnika, ale przy odpowiednio dużej jego populacji może nawet spadać. Z kolei  $y$  to drapieżnik, który wymierałby wykładniczo bez zdobyczy, ale przy jej dostatecznej obfitości może się namnażać. Interesuje nas tylko zachowanie układu w pierwszej ćwiartce  $\{(x, y) : x \geq 0, y > 0\}$ . Istnieje tu proste do zrozumienia położenie równowagi w  $(0, 0)$  będące siodłem, oraz stan równowagi  $y_0 = (\frac{c}{e}, \frac{a}{b})$ . Nietrudno policzyć, że w tym drugim punkcie macierz potoku zlinearyzowanego ma postać

$$DF(y_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{e} \\ \frac{ae}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

z urojonymi wartościami własnymi  $\pm\sqrt{ac}$ . W celu zbadania zachowania pozostałych orbit, znajdziemy całkę pierwszą. W tym celu podzielmy równania układu (8) stronami, otrzymując

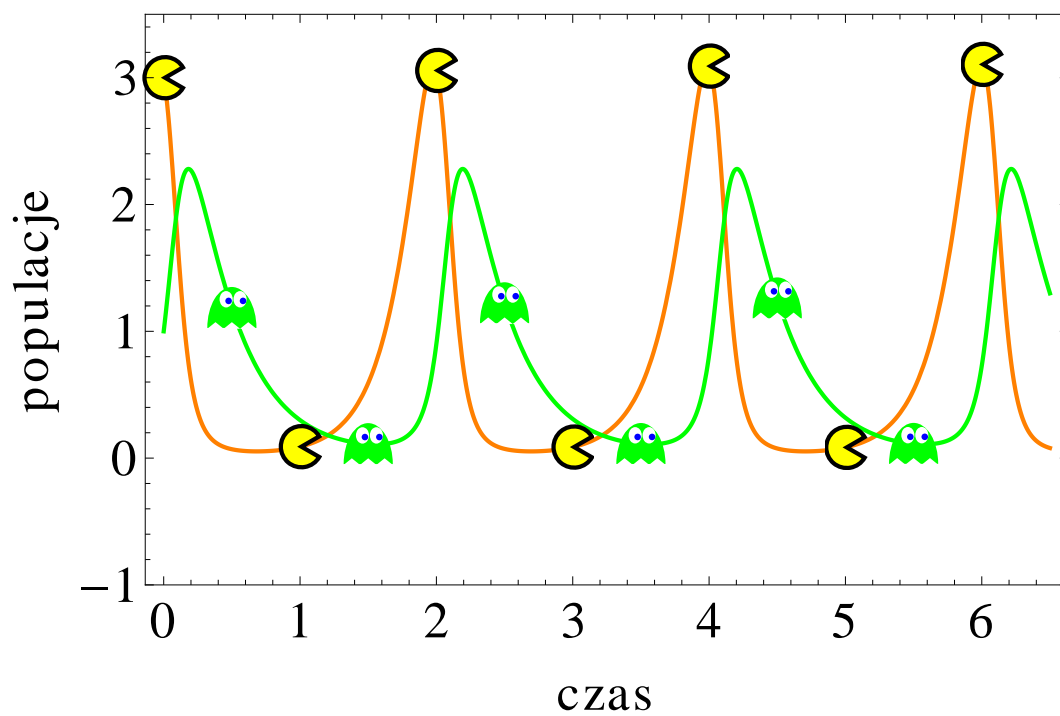
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{-c + ex}{a - by}.$$

Jest to równanie o rozdzielających się zmiennych, które łatwo rozwiązać w postaci

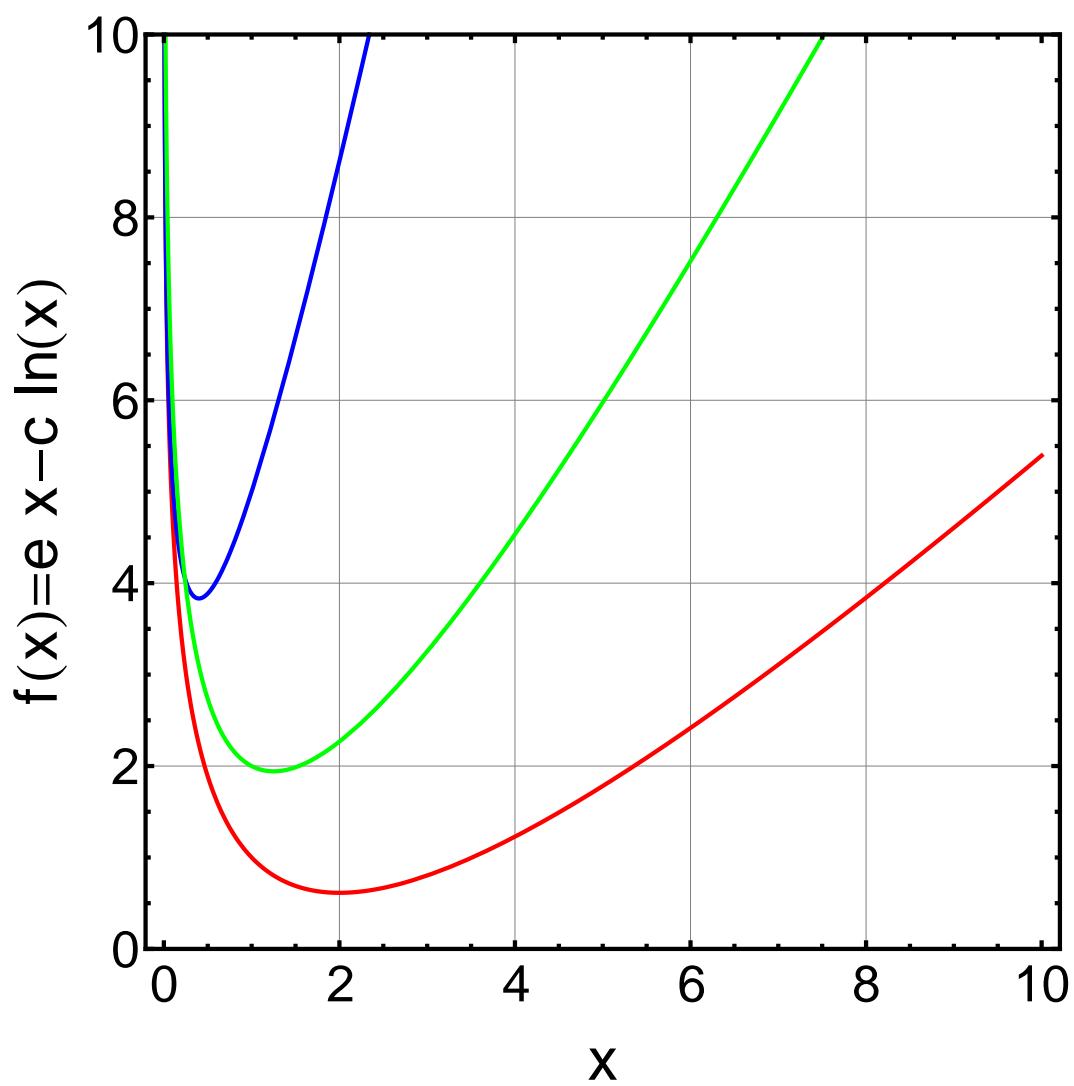
$$K = (ex - c \log x) + (by - a \log y),$$

gdzie  $K$  jest właśnie poszukiwaną całką pierwszą. Funkcja  $f(x) = ex - c \ln x$  jest wypukła i ma minimum punkcie  $x = \frac{c}{e}$ . Podobnie funkcja  $g(y) = by - a \log y$  mająca minimum w  $\frac{a}{b}$ . Obie funkcje dążą do  $+\infty$ , gdy argument zmierza do 0 lub  $\infty$ . Wobec tego poziomice funkcji  $K$  są krzywymi ograniczonymi, przecinającymi każdą prostą poziomą lub pionową w jednym lub dwóch punktach, a zatem są krzywymi zamkniętymi obiegającymi  $y_0$ . Punkt  $y_0$  jest zatem stabilny w sensie Lapunowa, ale nie asymptotycznie: populacje drapieżnika i zdobyczy zmieniają się w cyklach, które bynajmniej nie dążą do punktu równowagi.

Na końcu załączamy przykład szeregów czasowych generowanych przez równanie Lotki-Volterry na Rysunku (9) oraz wykres funkcji  $f$  na Rysunku (10).



Rysunek 9: Szeregi czasowe dla L-V ( $a = 5$ ,  $b = 7$ ,  $c = 3$ ,  $e = -4$ ).



Rysunek 10: Wykres funkcji  $f$  (czerw.  $e = 1, c = 2$ , nieb.  $e = 2, c = 5$ , ziel.  $e = 2, c = 2.5$ ).

## 2.2 Ruch w polu potencjału.

Rozważmy ruch cząstki o masie 1 w jednym wymiarze, w polu potencjału  $V(x)$ . Jeśli  $x(t)$  jest położeniem, zaś  $v(t) = \frac{dx}{dt}$  prędkością, ruch układu jest opisany równaniem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -V'(x) .$$

łatwo wtedy sprawdzić, że *energia całkowita* układu  $E(t) = \frac{v(t)^2}{2} + V(x(t))$  jest zachowana:

$$\frac{dE}{dt} = v \frac{dv}{dt} + V'(x) \frac{dx}{dt} = -v(t)V'(x) + V'(x)v(t) = 0 .$$

Dobrze znany jest przykład  $V(x) = x^2$  opisujący wahadło matematyczne bez tłumienia. Zbadajmy przykład potencjału o dwóch minimach  $V(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$  prowadzący do *równania Duffinga*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - x^3 .$$

Wykres tego potencjału zilustrowano na Rysunku (12).

Wówczas energia całkowita ma postać

$$E(x, v) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{v^2}{2} .$$

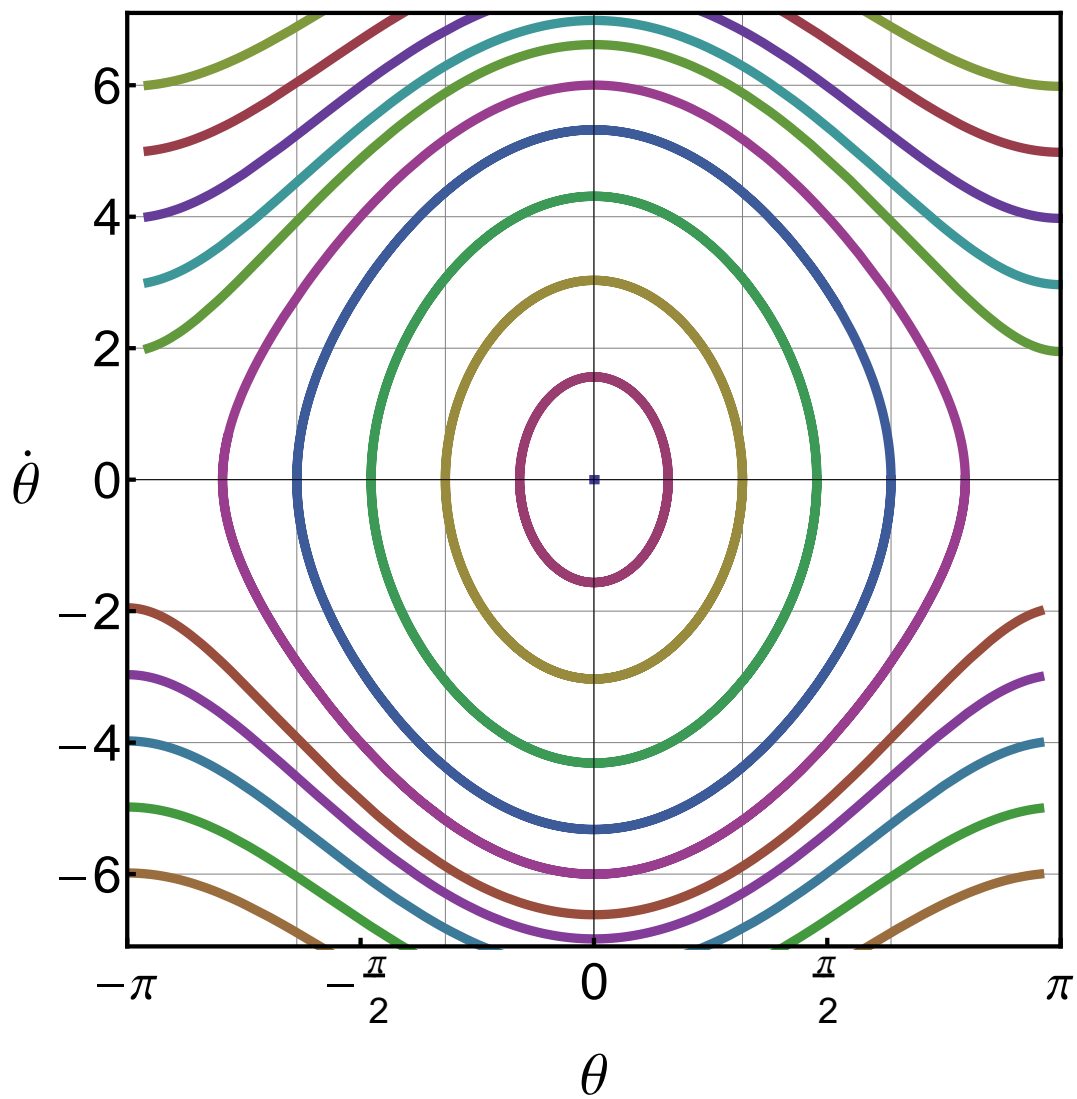
Jej wykres przedstawia Rysunek (13).

Minimum globalne równe  $-\frac{1}{4}$  jest osiągnięte w punktach  $(\pm 1, 0)$ . Punkty równowagi to  $(\pm 1, 0)$  oraz  $(0, 0)$ . Dwa z nich odpowiadają minimom energii. Trzecie to punkt stacjonarny, który z pewnością nie jest lokalnym ekstremum dla funkcji energii, bowiem macierz drugich pochodnych cząstkowych ma w nim postać

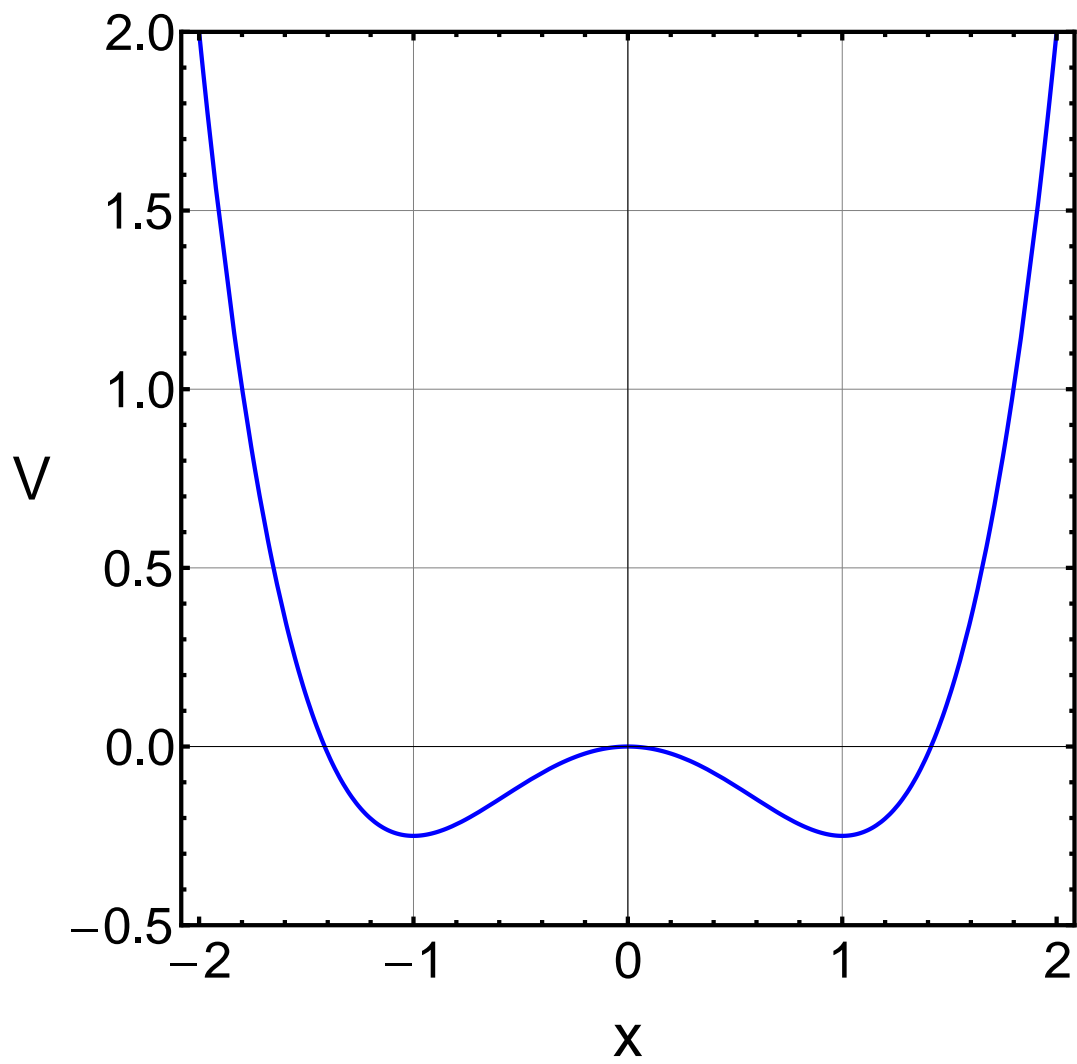
$$D^2E(0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Jak wiadomo z kursu rachunku różniczkowego wielu zmiennych, punkt ten jest *siodłem* dla funkcji energii, czego nie należy mylić z pojęciem punktu siodłowego dla potoku.

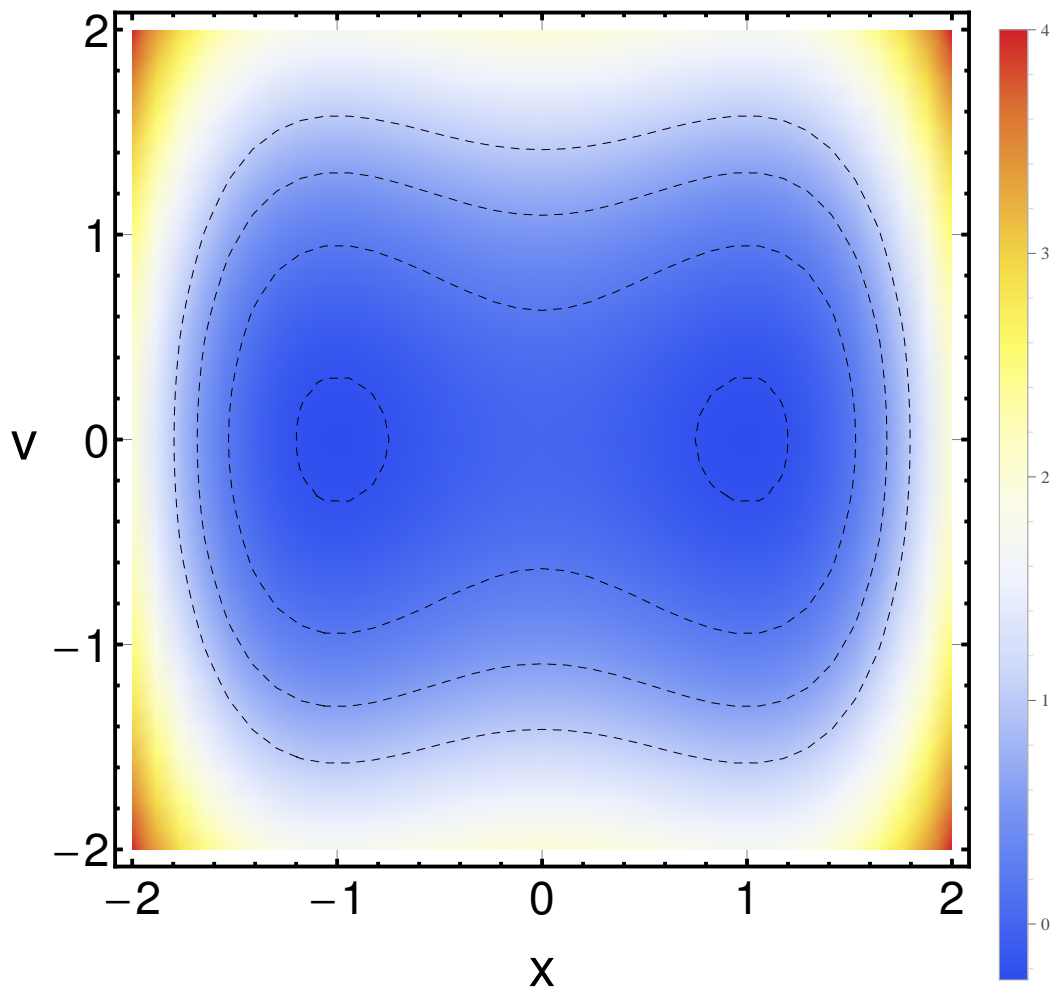
Dla wartości  $E$  między  $-\frac{1}{4}$  a 0, poziomice energii są parą krzywych zamkniętych, z których każda otacza jedno z minimów. Nie mogą one przecinać się, ponieważ nie mogą przecinać prostej  $x = 0$ . Zatem dla takich



Rysunek 11: Portret fazowy wahadła matematycznego dla  $g = 10$ ,  $m = 1$ .



Rysunek 12: Wykres potencjału dla równania Duffinga.



Rysunek 13: Wykres energii dla równania Duffinga.

wartości energii mamy dwa ruchy wahadłowe, każdy z nich wokół stabilnego położenia równowagi. Dla  $E = 0$  widzimy, że krzywa  $E = 0$  przechodzi przez  $(0, 0)$ , tworząc w nim samoprzecięcie. Dla  $E > 0$  poziomica jest znów parą gładkich krzywych, ale żadna z nich nie jest zamknięta, ani nawet ograniczona - obie przypominają hiperbole. Poziomice te można sobie przedstawić wyobrażając proces zatapiania woda obszaru składającego się dwóch dolin, dwóch grani i przełęczy między nimi. Najpierw wypełnione zostają doliny dwoma rozłącznymi jeziorami. Krytyczny moment nadchodzi, gdy jeziora sięgają przełęczy stykając się w niej. Potem jest już jedno jezioro i jego linia brzegowa rozciąga się wzdłuż każdej z obu grani.

Z punktu widzenia dynamiki modelu oznacza to, że  $(0, 0)$  jest dla niej także punktem siodłowym. W jego dowolnie małym otoczeniu znajdują się rozwiązania obiegające minima (w dolinach), rozwiązania przybiegające z nieskończoności i do niej wracające (po zboczach grani). Są też dwa bardzo szczególne rozwiązania dla  $E = 0$ . Poziomica energii całkowitej składa się wtedy z dwóch krzywych zamkniętych stykających się w w zerze. Każde z tych rozwiązań obiega jedną z gałęzi tej krzywej. Obieg taki zajmuje nieskończony czas: każde z tych rozwiązań dąży do zera przy czasie dążącym zarówno do plus, jak i do minus nieskończoności. Można zauważyć także, że każde z nich jest rozmaistością zarówno stabilną, jak i niestabilną tego punktu. Takie rozwiązania nazywamy *petlami homoklinicznymi* i powrócimy do nich w następnym wykładzie.

### 2.3 Funkcje Lapunowa.

Rozważmy wahadło fizyczne z tłumieniem:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (10)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\sin(x) - bv \quad (11)$$

Funkcja  $L(x, v) = -\cos(x) + \frac{v^2}{2}$  spełnia

$$\frac{dL(x(t), v(t))}{dt} = \sin x \frac{dx}{dt} + v \frac{dv}{dt} = v \sin x - v \sin x - bv^2 = -bv^2. \quad (12)$$

Jak widzimy, funkcja ta jest nierosnąca na trajektoriach. Ta własność jest fundamentalna dla funkcji Lapunowa. Definicję podajemy poniżej.

**Definicja 2.1** Załóżmy, że  $x_0$  jest punktem równowagi. Funkcję  $L$  określoną na pewnym otoczeniu otwartym  $U \ni x_0$  nazwiemy funkcją Lapunowa, niekiedy także słabą funkcją Lapunowa, jeśli  $\frac{dL(x(t))}{dt} \leq 0$  dla każdego rozwiązania lokalnego  $x(t)$  o wartościach w  $U$  oraz  $L$  ma ściśle minimum globalne w  $x_0$ , tj. dla każdego  $x \in U \setminus \{x_0\}$  zachodzi  $L(x) > L(x_0)$ . W definicji ścisłej funkcji Lapunowa zakładamy dodatkowo, że  $\frac{dL(x(t))}{dt} < 0$ , o ile tylko  $x(t)$  nie jest punktem równowagi.

Jak widzimy, w przypadku wahadła fizycznego z tłumieniem  $L$  jest funkcją Lapunowa, ale nie jest ścisłą funkcją Lapunowa, ponieważ zeruje się na całej prostej  $v = 0$ . W ogólności zachodzi następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.1** O ile w pewnym otoczeniu otwartym punktu równowagi istnieje funkcja Lapunowa, to jest on stabilny w sensie Lapunowa. Jeśli jest to ścisła funkcja Lapunowa, to punkt ten jest asymptotycznie stabilny.

Twierdzenie to nie wystarcza do określenia stabilności punktu równowagi w zerze dla wahadła fizycznego z tłumieniem, ponieważ wiadomo dobrze z intuicji fizycznej, że ten punkt równowagi jest nie tylko stabilny, lecz asymptotycznie stabilny. Przydaje się wobec tego twierdzenie mocniejsze:

**Twierdzenie 2.2** Przypuśćmy, że istnieje słaba funkcja Lapunowa myśl Definicji 2.1, dla której  $\frac{dL(y(t))}{dt} = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $y(t) \in Z \subset U$ . Załóżmy, że  $Z$  ma tę własność, iż dla każdego  $y \in Z$ ,  $y \neq x_0$  istnieje  $t > 0$  takie, że  $\phi^t(y) \notin Z$ . Wówczas  $x_0$  jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi.

Idea dowodu Twierdzenia 2.2 jest taka, że pokazujemy najpierw, iż

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), Z) = 0$$

dla każdej orbity z pewnego otoczenia  $x_0$ , gdyż każde wyjście orbity poza ustalone otoczenie  $Z$  pociąga spadek  $L$  o określoną wartość. Ale wtedy  $\omega(x)$  nie może zawierać punktów innych od  $x_0$  w myśl założenia.

Dla wahadła fizycznego z tłumieniem założenie Twierdzenia 2.2 zachodzi, ponieważ  $v = 0$  i  $x \neq 0$  w odpowiednio małym otoczeniu zera, tj. nie zawierającym punktów  $x = k\pi$  dla  $k$  całkowitych różnych od 0, implikuje  $\frac{dv}{dt} = -\sin x \neq 0$ .

## 2.4 Zbiory graniczne.

Rozważmy potok równania różniczkowego określonego na zbiorze otwartym  $U \subset \mathbb{R}^m$ .

**Definicja 2.2** *Przypuśćmy, że pewne rozwiązanie  $x(t)$  jest określone dla wszystkich wartości  $t > 0$ . Wówczas zbiorem  $\omega$ -granicznym  $x$ , oznaczanym  $\omega(x)$ , nazywa się zbiór wszystkich  $y \in U$  takich, że istnieje ciąg  $t_n \rightarrow \infty$ , dla którego  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = y$ . Analogicznie, jeśli  $x(t)$  jest określone dla wszystkich  $t < 0$ , to zbiorem  $\alpha$ -granicznym  $\alpha(x)$  nazywa się zbiór takich  $y$ , dla których istnieje  $t_n \rightarrow -\infty$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = y$ .*

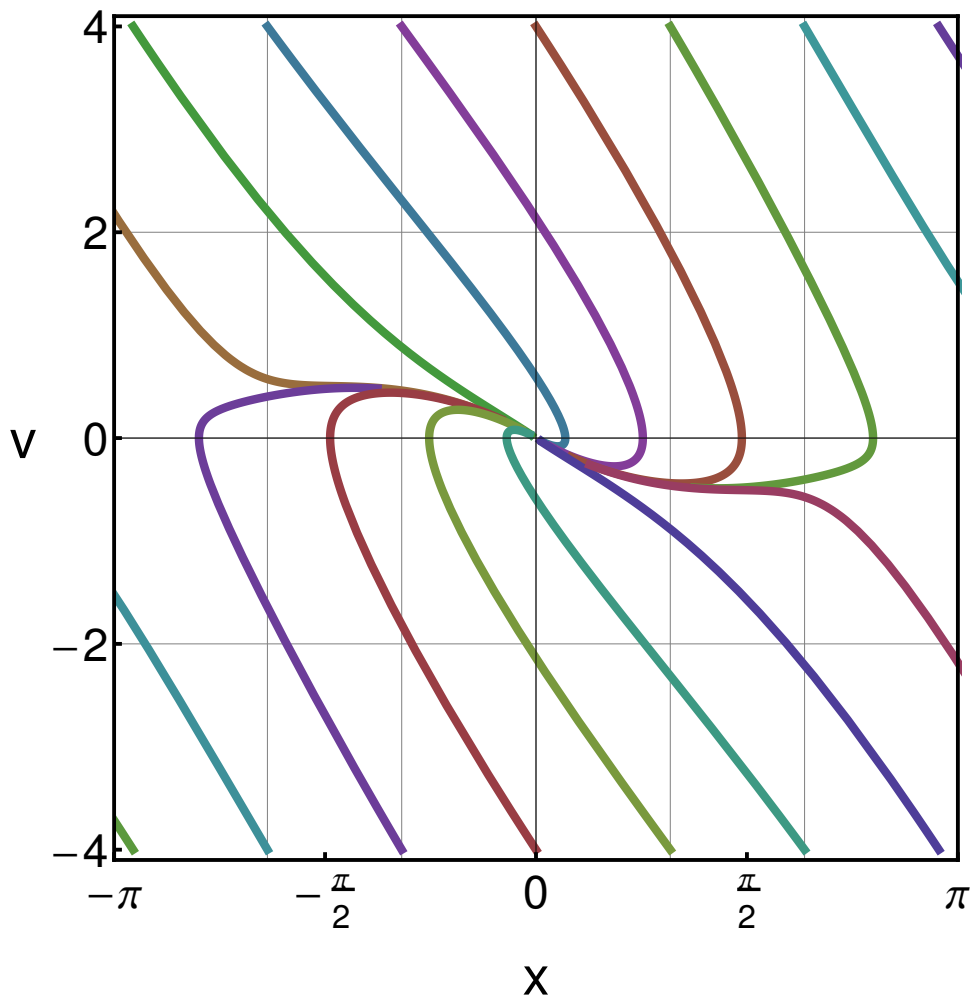
Poniższe twierdzenie podaje postawowe własności zbiorów granicznych.

**Twierdzenie 2.3** • *Zbiory graniczne zależą tylko od orbity  $x$ , a nie od samego punktu  $x$ , tj. jeśli  $\hat{x} = \phi^t(x)$  dla pewnego  $t \in \mathbb{R}$ , to  $\omega(x) = \omega(\hat{x})$  oraz  $\alpha(x) = \alpha(\hat{x})$ .*

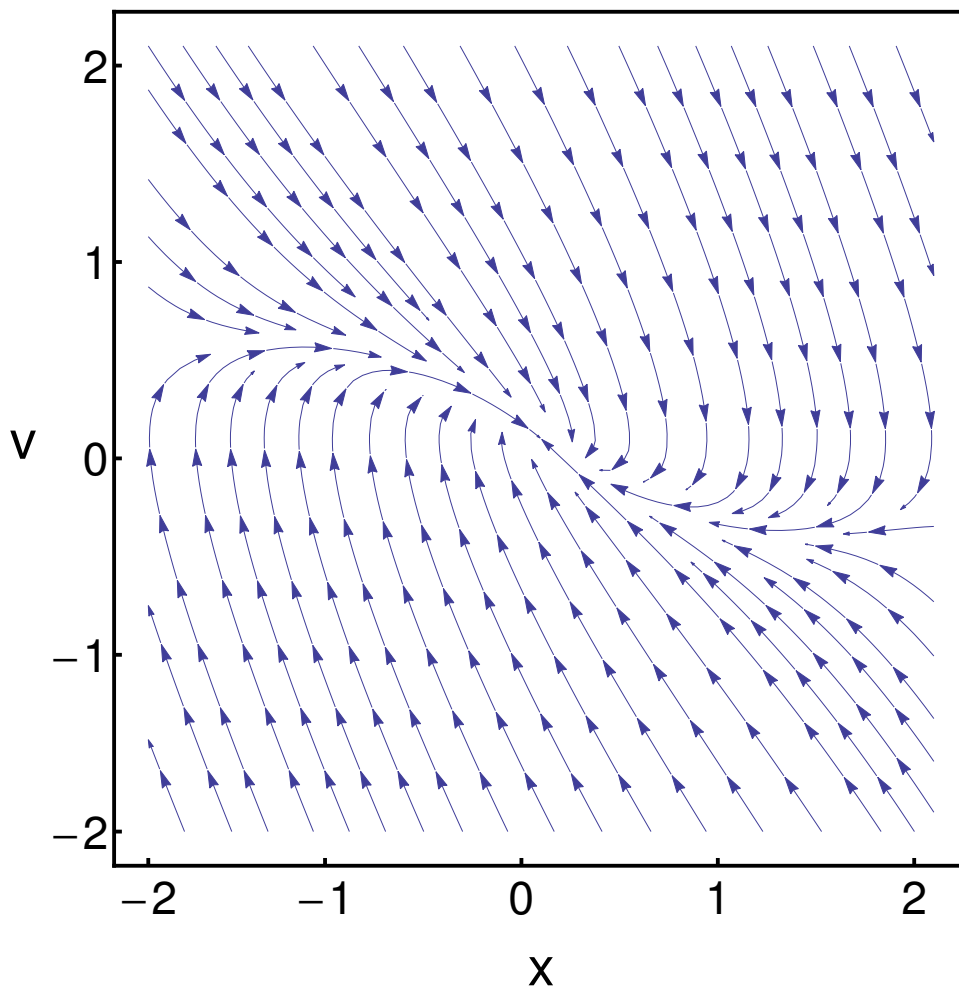
- *Zbiory graniczne są niezmiennicze, tj. dla dowolnych  $x$  i  $t$ ,  $\phi^t(\omega(x)) = \omega(x)$  oraz  $\phi^t(\alpha(x)) = \alpha(x)$ .*
- *Zbiory graniczne są domknięte w  $U$ .*
- *Jeśli orbita  $x(t)$  jest zawarta w zwartym podzbiorku  $U$ , oba zbiory graniczne są niepuste i spójne.*

Dla lepszego wyjaśnienia tych pojęć, rozważmy orbity wahadła fizycznego z tłumieniem i wyznaczmy możliwe zbiory graniczne. Zachowanie tego modelu ilustrują Rysunki (14) i (15).

Ze względu na postać funkcji Lapunowa  $L$  zadaną formułą (12), każda orbita porusza się w ograniczonym zbiorze wartości zmiennej  $v$ . Co więcej, funkcja Lapunowa ściśle maleje poza zbiorem  $v = 0$ . Zatem, jeśli orbita przemieszcza się od  $x = k\pi$  dla  $k$  nieparzystego do  $x = k'\pi$  dla  $k$  parzystego, to funkcja Lapunowa musi spaść o stałą wartość, bo  $-\cos x$  spada o 2, co mogłoby wprawdzie skompensować wzrost  $v^2$ , ale wtedy  $v$  jest niezerowa i funkcja Lapunowa spada z innego powodu, mianowicie formuły (12). Stąd takie przejście (odpowiadające pełnemu obrotowi wahadła) może się wydarzyć jedynie skończenie wiele razy i zmienna  $x$  też jest ograniczona. Zbiór  $\omega(x)$  jest więc niepusty spójny i zwarty w myśl Twierdzenia 2.3.



Rysunek 14: Portret fazowy dla równania wahadła fizycznego z tłumieniem  $b = 2$ .



Rysunek 15: Diagram fazowy dla równania wahadła fizycznego z tłumieniem  $b = 2$ .

Dla dowolnego innego zbioru niezmienniczego  $\Omega$ , niech  $L_0 = \inf\{L(x, v) : (x, v) \in \Omega\}$ . Wtedy zbiór  $\{(x, v) \in \Omega : L(x, v) = L_0\}$  jest także niezmienniczy i  $L$  jest na nim stała. Musi więc to być punkt równowagi. Analogicznie, jeśli  $L_1 = \sup\{L(x, v) : (x, v) \in \Omega\}$ , to  $L_1$  musi być przyjęte w innym punkcie równowagi. Jest są tylko dwie możliwe wartości  $L$  w punktach równowagi:  $-1$  w dolnym i  $1$  w górnym. Stąd albo dolne położenie równowagi należy do  $\Omega$ , albo  $L_0 = L_1 = 1$  i cały  $\Omega$  składa się z górnego położenia równowagi. Wreszcie, jeśli dolne położenie równowagi należy do pewnego zbioru  $\omega$ -granicznego, to musi być całym tym zbiorem, bowiem aby do niego podejść, orbita musi wejść w otoczenie, które jest całe przyciągane przez ten punkt równowagi, a wtedy można się powołać na zależność zbioru  $\omega$ -granicznego tylko od orbity. Podsumowując, zbiory  $\omega$ -graniczne w dla wahadła fizycznego to tylko punkty równowagi.

W celu zbadania zbiorów  $\alpha$ -granicznych odwróćmy czas w układzie (10), tj. podstawmy  $T = -t$  oraz  $V = -v$ . Wtedy otrzymujemy

$$\frac{dx}{dT} = V \quad (13)$$

$$\frac{dV}{dT} = -\sin(x) + bv \quad (14)$$

Formalnie rzecz biorąc, jest to ten sam układ, co (10), tylko z  $-b$  zamiast  $b$ . Wtedy formuła (12) nadal zachodzi, ale ze znakiem minus. Czyli  $L$  jest “odwrotną” funkcją Lapunowa rosnącą, zamiast maleć. Po zmianie kierunku czasu, zbiory  $\alpha$ -graniczne układu (10) sprowadzają się do  $\omega$ -granicznych dla układu (13). Tym razem jest jak najbardziej możliwe, że orbita ucieka do nieskończoności, tj. wahadło rozpędza się kręcąc coraz szybciej. Wówczas zbiór graniczny jest pusty. Jeśli jednak jest on niepusty, to podobnie, jak w poprzednim przypadku, pokazujemy, że  $L_0 = -1, L_1 = 1$ . Dolne położenie równowagi jest teraz odpychające, co także pokazuje, że jest całym zbiorem granicznym, o ile tylko do niego należy. Zatem, zbiór  $\alpha$ -graniczny może być pusty, lub może być górnym lub dolnym położeniem równowagi.

## 2.5 Model sieci neuronowej.

Następujący model został zaproponowany przez Hopfielda dla modelowania działania mózgu. “Mózg” składa się z  $m$  neuronów, a stan każdego jest opisany przez rzeczywistą zmienną  $x_i$ . Stąd cały układ jest opisany przez punkt w  $\mathbb{R}^m$ . Każdy neuron przejawia aktywność opisaną funkcją  $f_i(x_i)$ .

Ewolucja sieci polega na tym, że każdy neuron ma tendencję ku naturalnemu stanowi 0 (zapewne drzemka), ale podlega on wpływowi aktywności innych neuronów, co opisuje macierz  $T = (t_{ij})$  oraz zewnętrznemu wymuszaniu opisanemu przez wektor  $b_i$ . Równanie ma zatem postać

$$\frac{dx_i}{dt} = -c_i x_i + \sum_{j=1}^m t_{ij} f_j(x_j) + b_i . \quad (15)$$

Zakładamy, że  $c_i$  są wszystkie dodatnie. Jeśli utworzymy z nich macierz diagonalną  $C$ , zaś z wielkości  $f_j(x_j)$  wektor  $f(x)$ , to równanie (15) możemy zapisać wektorowo jako

$$\frac{dx}{dt} = -Cx + Tf(x) + B .$$

Z kolei zdefiniujemy  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  jako

$$F(x) = \sum_{j=1}^m c_j \int_0^{f_j(x_j)} f_j^{-1}(s) ds .$$

Wreszcie, zdefiniujemy

$$L(x) = F(x) - \frac{1}{2} [f(x) + T^{-1}B]^T T [f(x) + T^{-1}B] . \quad (16)$$

Zachodzi

**Twierdzenie 2.4** *Założmy, że wszystkie funkcje aktywności neuronów  $f_j$  są ograniczone i różniczkowalne z pochodnymi, które są wszędzie dodatnie. Przypuśćmy także, iż  $T$  jest macierzą symetryczną i odwracalną. Wówczas  $L(x)$  jest ścisłą funkcją Lapunowa. W konsekwencji, wszystkie rozwiązania dążą do punktów stałych.*

Interpretacja tego faktu jest taka, że wektor  $B$  jest zadaniem postawionym sieci. Sieć ewoluując według równania (13), powiedzmy, że myśląc, dąży do stanu równowagi będącego rozwiązaniem problemu. A priori jednak rozwiązanie zależy nie tylko od  $B$ , ale i od warunku początkowego na  $x$ .

Dla dowodu, zacznijmy od różniczkowania członu  $F(x)$ .

$$\frac{d}{dt} \int_0^{f_j(x_j)} f_j^{-1}(s) ds = x_j \frac{d}{dt} f_j(x_j) = x_j f'_j(x_j) \frac{dx_j}{dt} .$$

Czyli, przechodząc do zapisu wektorowego,

$$\frac{d}{dt}F(x) = \sum_{j=1}^m c_j x_j f'(x_j) = [f'(x) \frac{dx}{dt}]^T C x .$$

Z kolei przypomnijmy, że jeśli  $y(t)$  jest wektorem zależnym od czasu, a  $T$  macierzą symetryczną o stałych współczynnikach, to  $\frac{d}{dt}(y^T T y) = 2(y')^T T y$ . Stąd pochodna drugiego członu formuły (16) wynosi

$$-[f'(x) \frac{dx}{dt}]^T T [f(x) + T^{-1} B] = -[f'(x) \frac{dx}{dt}]^T [T f(x) + B] ,$$

gdyż  $B$  jest stałym wektorem. Dodając otrzymujemy

$$\frac{dL}{dt} = [f'(x) \frac{dx}{dt}]^T [C x - T f(x) - B] = -[f'(x) \frac{dx}{dt}]^T \frac{dx}{dt} = - \sum_{j=1}^m f'_j(x_j) (x'_j) \leq 0 .$$

Co więcej, ponieważ  $f'_j(x_j)$  są dodatnie z założenia, to równość jest możliwa tylko wtedy, gdy wszystkie  $x'_j$  znikają, tj. w punktach równowagi.

W uzupełnieniu, mamy następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.5** *Przy założeniach Twierdzenia 2.4, niech  $B_1$  oraz  $B_2$  będą różnymi wartościami  $B$ , zaś  $x_1$  i  $x_2$  odpowiednimi im położeniami równowagi. Wtedy  $x_1 \neq x_2$ .*

Skoro  $x_1, x_2$  są położeniami równowagi, to z formuły (15) otrzymujemy

$$-C x_1 + T f(x_1) + B_1 = 0 = -C x_2 + T f(x_2) + B_2 .$$

Jeśli  $x_1 = x_2$ , to  $B_1 = B_2$ .

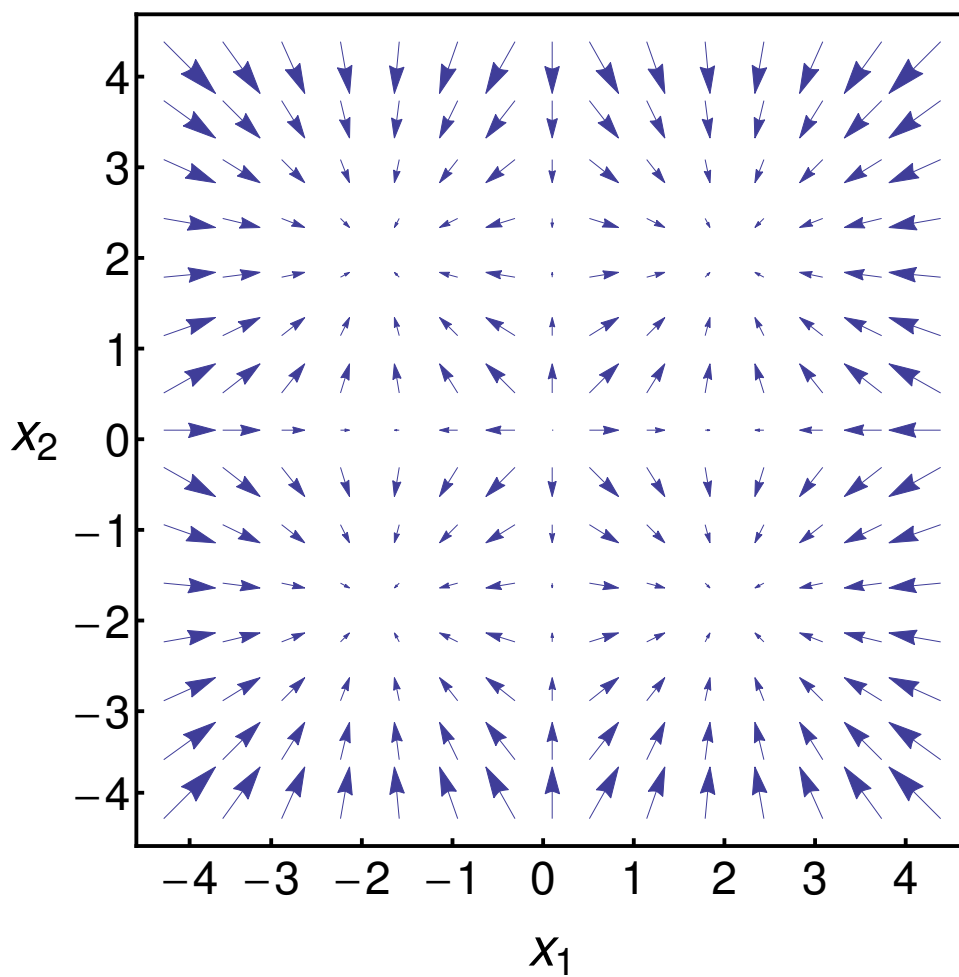
Czyli sieć na różne pytania daje różne odpowiedzi, a zatem nie traci informacji.

Diagram fazowy przedstawia Rysunek (16).

## Ćwiczenia i laboratoria.

- Zbadać układ

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + x^3 - y . \end{aligned}$$



Rysunek 16: Diagram fazowy dla rwnania opisujcego sie neuronow (zad 2. <http://if.pw.edu.pl/~siudem/TChD/chaos6.pdf>).

W tym celu znaleźć funkcję Lapunowa w możliwie dużym otoczeniu punktu równowagi w 0. Następnie numerycznie zbadać globalne zachowanie układu, a więc inne położenia równowagi, ich stabilność oraz zbiory graniczne dla różnych warunków początkowych.

- Zbadać układ

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \frac{a}{x^{13}} + \frac{b}{x^7}\end{aligned}$$

dla dodatnich parametrów  $a, b$ . Wiadomo, że istnieje pewna funkcja  $V(x)$  zwana potencjałem taka, że

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dV}{dx}.$$

Znaleźć ten potencjał i wykazać, że funkcja  $L(x, y) = V(x) + \frac{y^2}{2}$  jest całką pierwszą układu. Opisać na tej podstawie zachowanie układu: punkty okresowe i ich stabilność. Przy użyciu komputera znaleźć portret fazowy oraz przedyskutować możliwe zbiory graniczne.

- Udowodnić Twierdzenie 2.4 różniczkując  $L$ . Do czego potrzebne jest założenie o symetryczności  $T$ ?

## 3 Orbity okresowe

### 3.1 Stabilność orbit.

Zakładamy, że model zadany jest autonomicznym równaniem różniczkowym  $\frac{dx}{dt} = F(x)$  w przestrzeni euklidesowej. Potok równania oznaczamy przez  $\phi^t(x)$  i zakładamy, że jest określony dla wszystkich czasów. Większość rozważań można prześledzić na przykładach modeli dwuparametrowych.

Po punktach równowagi, kolejną z łatwiejszych do zauważenia cech dynamiki modelu jest obecność orbit okresowych, a więc takich  $x_0$ , dla których istnieje  $T > 0$  takie, że  $\phi^T(x_0) = x_0$ , ale dla żadnego  $0 < t < T$  nie zachodzi  $\phi^t(x_0) = x_0$ . Liczbę  $T$  nazwiemy wtedy *okresem*  $x_0$ . Zbiór  $\gamma = \{\phi^t(x_0) : 0 \leq t < T\}$  jest orbitą okresową. Łatwo zauważyć, że każdy punkt orbity okresowej sam jest okresowy z tym samym okresem  $T$ .

Pojęcia używane do opisanie orbit okresowych są analogiczne do tych, których używaliśmy w odniesieniu do punktów równowagi.

**Definicja 3.1** *Orbita okresowa  $\gamma$  jest stabilna w sensie Lapunowa, jeśli dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje takie  $\delta > 0$ , że jeśli tylko  $\text{dist}(y, \gamma) < \delta$ , to dla wszystkich  $t > 0$  zachodzi  $\text{dist}(\phi^t(y), \gamma) < \epsilon$ .*

Zwróćmy uwagę, że stabilność orbity okresowej  $x_0$  jest czymś innym od stabilności samego  $x_0$ . Rozważmy układ, we współrzędnych biegunowych,

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = r \quad (18)$$

Jego orbitami są okręgi ze środkiem w początku układu i współrzędnych i bez wątplenia każda z nich jest stabilna w sensie Definicji 3.1. Jest jednak równie jasne, że żaden punkt takiej orbity nie jest stabilny w sensie Lapunowa, tj. Definicji 1.1, ponieważ okresy tych orbit są różne i pobliskie punkty na bliskich orbitach po pewnym czasie znajdują się w przeciwfazie z wartościami  $\theta$  różniącymi się o  $\pi$ .

**Definicja 3.2** *Orbita stabilna w sensie Definicji 3.1 nazywa się dalej asymptotycznie stabilną, jeśli  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi^t(y), \gamma) = 0$  dla każdego  $y$  z pewnego otoczenia otwartego  $\gamma$ .*

**Definicja 3.3** *Orbita  $\gamma$  nazywa się niestabilną, jeśli nie są spełnione warunki Definicji 3.1, a powiemy dalej, że  $\gamma$  jest odpychająca, jeśli jest asymptotycznie stabilna dla potoku z odwróconym czasem, to jest warunki Definicji 3.1 oraz 3.2 są spełnione po zastąpieniu  $\phi^t$  przez  $\phi^{-t}$ .*

Może nie być jasne, że istotnie orbita odpychająca w powyższym sensie nie może być stabilna w sensie Lapunowa. Załóżmy więc, że dla pewnego  $y$  mamy  $\text{dist}(y, \gamma) = \epsilon$ . Z Definicji 3.1 istnieje  $\delta > 0$  takie, że jeśli  $\text{dist}(\hat{y}, \gamma) < \delta$ , to

$$\forall t > 0 \quad \text{dist}(\phi^t(\hat{y}), \gamma) < \epsilon. \quad (19)$$

Ale jeśli  $\gamma$  jest odpychająca, to dla pewnego  $\tau > 0$  mamy

$$\text{dist}(\phi^{-\tau}(y), \gamma) < \delta.$$

Biorąc  $\phi^{-\tau}(y)$  za  $\hat{y}$  dostajemy z warunku (19), że  $\text{dist}(y, \gamma) < \epsilon$ , skąd sprzeczność.

Z punktu widzenia analitycznego stabilność orbity jest ściśle związana z pochodną potoku  $D\phi^T(x_0)$ , gdzie  $T$  jest okresem, zaś  $x \in \gamma$ . Jeśli zamiast  $x_0$  weźmiemy inny punkt  $x_1 \in \gamma$ , to  $x_1 = \phi^\tau(x_0)$  dla pewnego  $\tau$ , a stąd  $\phi^T(x_1) = \phi^\tau \circ \phi^T \circ \phi^{-\tau}(x_1)$  i dalej

$$D\phi^T(x_1) = D\phi^\tau D\phi^T(x_0)(D\phi^\tau)^{-1},$$

czyli macierze  $D\phi^T(x_0)$  oraz  $D\phi^T(x_1)$  są podobne, co w szczególności oznacza, że mają takie same spektra. Jeśli 0 jest hiperbolicznym punktem stałym dla którejkolwiek z tych macierzy, to własności stabilności orbity są takie same, jak własności punktu stałego w 0 dla tej macierzy. Jednak ta metoda badania stabilności ma dwie wady, bo po pierwsze nie wiadomo, co począć w przypadku niehiperbolicznym, a po drugie sama pochodna potoku jest dość trudna do otrzymania.

**Przekształcenie Poincarégo.** Przetnijmy orbitę  $\gamma$  w punkcie  $x_0 \in \gamma$  pewną hiperpłaszczyzną wymiaru  $m - 1$ , a ogólniej podrozmaitością wymiaru  $m - 1$ . Przecięcia należy dokonać w sposób transwersalny a więc tak, że pole wektorowe  $F(x_0)$ , które jest styczne do  $\gamma$ , nie jest styczne do cięcia. Oznaczmy to cięcie przez  $M$ . Zachodzi

**Lemat 3.1.1** *Dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieją  $T > 0$  oraz otoczenia otwarte  $x_0 \subset U \subset V$  w  $M$  takie, iż dla każdego  $y \in U$  istnieje  $T(y) \in (T - \epsilon, T + \epsilon)$  takie, że  $\phi^{T(y)}(y) \in V$  przy czym  $\phi^t(y) \notin V$  dla każdego innego  $0 < t < T + \epsilon$ .*

**Definicja 3.4** Przekształceniem Poincarégo nazwiemy odwzorowanie  $P : U \rightarrow V$  zadane przez  $P(y) = \phi^{T(y)}(y)$ .

Używa się też określeń *cięcie Poincarégo* lub, bardziej opisowo, *przekształcenie pierwszego powrotu*. My będziemy używać wyrażenia cięcie Poincarégo w odniesieniu do  $M$ .

W oczywisty sposób  $x_0$  jest punktem stałym  $P$ , a samo  $P$  jest dyfeomorfizmem  $U$  na obraz. Z twierdzenia o ciągłości rozwiązań równania względem warunków początkowych wynika też, własności stabilności dla  $x_0$  względem przekształcenia Poincarégo są takie same, jak własności stabilności orbity w sensie Definicji 3.1-3.3. Tak więc orbita jest stabilna wtedy i tylko wtedy,

gdy  $x_0$  jest stabilny w sensie Lapunowa dla  $P$ , to samo dla asymptotycznej stabilności i odpychania. Nie trzeba tu zakładać hiperboliczności  $x_0$ .

Zachodzi też następujący związek pochodnej przekształcenia Poincarégo z wartościami własnymi macierzy  $D\phi^T(x_0)$ .

**Lemat 3.1.2** *Wartości własne pochodnej potoku  $D\phi^t(x_0)$  są takie same, jak wartości własne pochodnej  $DP(x_0)$ , wraz z krotnościami, przy czym pochodna potoku ma dodatkową wartość własną 1 z wektorem własnym  $F(x_0)$ .*

Dla  $m = 2$  cięcie Poincarégo jest jednowymiarowe. Wówczas  $DP(x_0)$  jest liczbą  $P'(x_0)$  i zachodzi wzór

$$P'(x_0) = \exp \left[ \int_0^T \operatorname{tr} DF(\phi^\tau(x_0)) d\tau \right] .$$

Ze wzoru Liouville'a wielkość po prawej stronie to wyznacznik macierzy  $D\phi^t(x_0)$ , ten zaś jest równy wartości własnej wspólnej z  $DP$  w myśl Lematu 3.1.2, co uzasadnia formułę.

## 3.2 Cykle graniczne.

W potokach liniowych równań różniczkowych rozwiązania okresowe pojawiają się w jeden tylko sposób wtedy, gdy istnieje para sprzężonych czy-  
sto urojonych wartości własnych, która to sytuacja jest określana jako centrum. Przykład zadany formułą (17) jest podobnej natury, choć nieliniowy, w tym sensie, że istnieje cały obszar w przestrzeni fazowej wypełniony orbitami okresowymi. Inną możliwą do pomyślenia sytuacją jest izolowana orbita okresowa.

**Definicja 3.5** *Cyklem granicznym nazwiemy orbitę okresową  $\gamma$ , która jest zbiorem  $\omega$ - lub  $\alpha$ -granicznym dla pewnej innej orbity.*

Cykle graniczne nie mogą istnieć dla równań liniowych. Poniżej podajemy klasyczny przykład.

**Oscylator Van der Pola.** Następujące równanie opisuje zachowanie pewnych obwodów elektrycznych:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 . \quad (20)$$

Dla dodatnich wartości parametru  $\mu$  opisuje się taki układ jako *oscylator samowzbudzony*. Istotnie, jego linearyzacja wokół położenia równowagi w  $x = 0$  ma wartości własne o dodatnich częściach rzeczywistych, co oznacza, że punkt równowagi jest odpychający. Jest to jednak prawdą jedynie dla układu zlinearyzowanego. Przy dostatecznie dużych wartościach  $x$  dominować zaczyna człon kwadratowy. Powoduje on niejako zmianę znaku tłumienia dla  $x > 1$ . Bardziej ilościowo można to rozumowanie ująć rozpatrując funkcję testową  $L(x, v) = x^2 + v^2$ , gdzie  $v$  jak zwykle oznacza  $\frac{dx}{dt}$ . Nietrudno wyliczyć, że

$$\frac{dL}{dt} = \mu(1 - x^2)v^2$$

Zatem funkcja  $L$  rośnie wzdłuż orbit dla  $|x| < 1$ , a maleje przy  $|x| > 1$ . Nie jest jednak możliwe rozwiązanie  $x = 1$  lub  $x = -1$ , bo nie są to punkty równowagi, zatem należy oczekiwać, że rozwiązania od pewnego momentu będą oscylować między wartościami  $|x|$  nieco większymi i mniejszymi od 1. Zatem rozwiązanie zaczynające w pobliżu punktu równowagi będzie wykonywało oscylacje o rosnącej amplitudzie, ale pozostanie w obszarze ograniczonym. Z drugiej strony, rozwiązanie o wielkiej amplitudzie początkowej będzie ją stopniowo tracić wchodząc w obszar ograniczony, ale nie może też dążyć do zera, które jest punktem odpychającym. Wydaje się więc intuicyjnie, że powinien istnieć jakiś graniczny reżim oscylacji.

**Twierdzenie Poincaré-Bendixsona.** Intuicję tę precyzuje następujące ogólne twierdzenie.

**Twierdzenie 3.1** *Rozważmy zbiór zwarty  $A \subset \mathbb{R}^2$  wraz z potokiem  $\phi^t(x)$  pewnego równania różniczkowego określonego na otoczeniu  $A$ . Załóżmy, że  $A$  jest niezmienniczy w przód pod działaniem potoku: dla każdego  $t \geq 0$  zachodzi  $\phi^t(A) \subset A$ . Przypuśćmy dalej, że potok ma tylko skończenie wiele punktów równowagi w  $A$ . Wówczas dla każdego warunku początkowego  $y \in \mathbb{R}^2$  zbiór  $\omega(y)$  jest jednego z trzech następujących typów:*

- pojedynczy punkt równowagi,
- orbita okresowa,
- sumą skończenie wielu punktów okresowych  $q_1, \dots, q_n$  oraz orbit  $\gamma_i$ , przy czym każda  $\gamma_i$  ma tę własność, że  $\alpha(\gamma_i) = q_{k(i)}$  oraz  $\omega(\gamma_i) = q_{li}$

dla pewnych  $1 \leq k(i), \ell(i) \leq n$ , przy czym graf skierowany utworzony z wierzchołków  $q_i$  i krzywych  $\gamma_i$  jest tranzytywny.

Zatem przypadki inne niż orbita okresowa wymagają istnienia punktów równowagi, które nie są odpychające, a mają przynajmniej jeden kierunek przyciągający. W przypadku oscylatora Van der Pola jedyny punkt równowagi w zerze jest odpychający. Zatem, jeśli znajdziemy zbiór zwarty  $A$  niezmienniczy w przód, to twierdzenie Poincaré-Bendixsona dowodzi istnienia cyklu granicznego. W istocie można wykazać wprost, nie posługując się tym twierdzeniem, a zamiast tego rozpatrując odpowiednio wybrane przekształcenia Poincarégo, że istnieje jeden cykl graniczny, który jest asymptotycznie stabilny i przyciąga każdą orbitę za wyjątkiem punktu równowagi w zerze. Wykres takiego cyklu znajduje się na Rysunku (17), a diagram fazowy na Rysunku (18).

W literaturze zajmującej się opisem organizmów żywych z punktu widzenia dynamicznego rozpowrzechniony jest pogląd, że stabilne cykle graniczne są podstawą formą funkcjonowania takich organizmów, co wyjaśnia cykliczność wielu procesowych życiowych oraz tendencję organizmów żywych do powrotu do stanu uprzedniej równowagi.

### 3.3 Narodziny cyklu granicznego - bifurkacja Hopfa.

Rozważmy następujący układ równań:

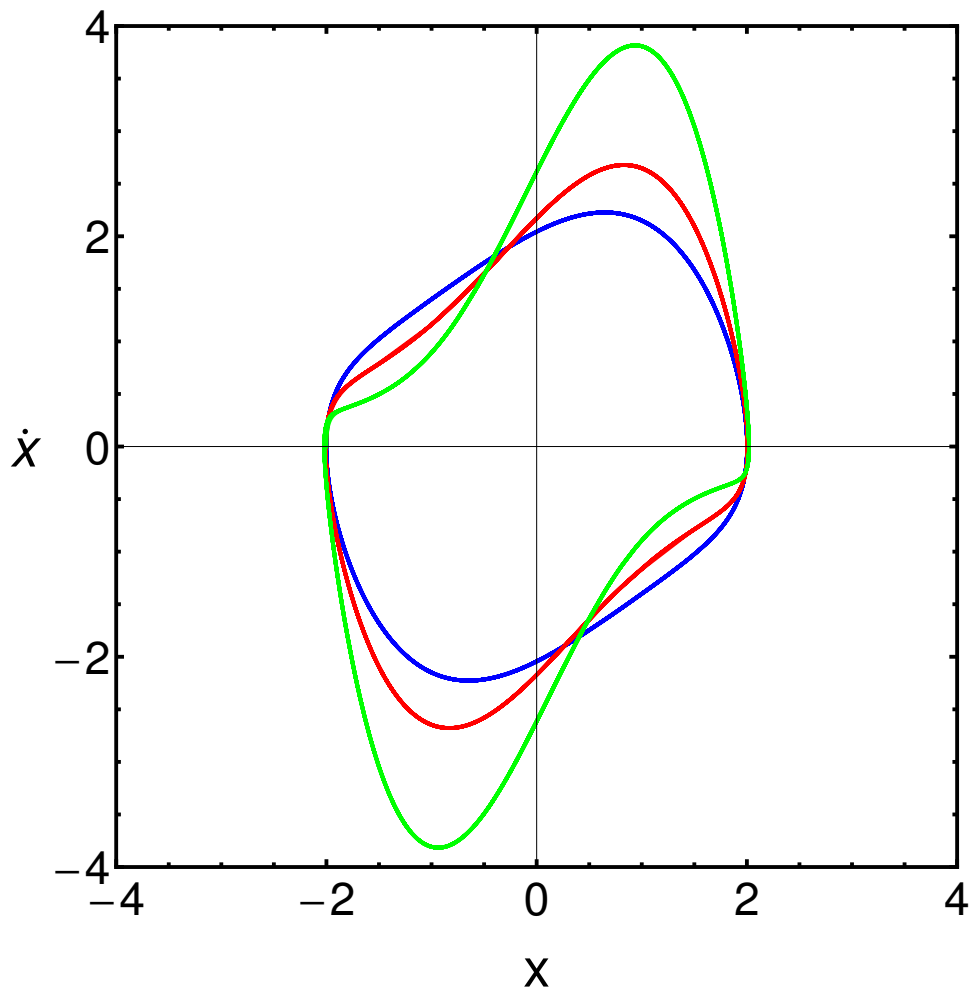
$$\frac{dx}{dt} = \mu x - \omega y + Kx(x^2 + y^2) \quad (21)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x + \mu y + Ky(x^2 + y^2) \quad (22)$$

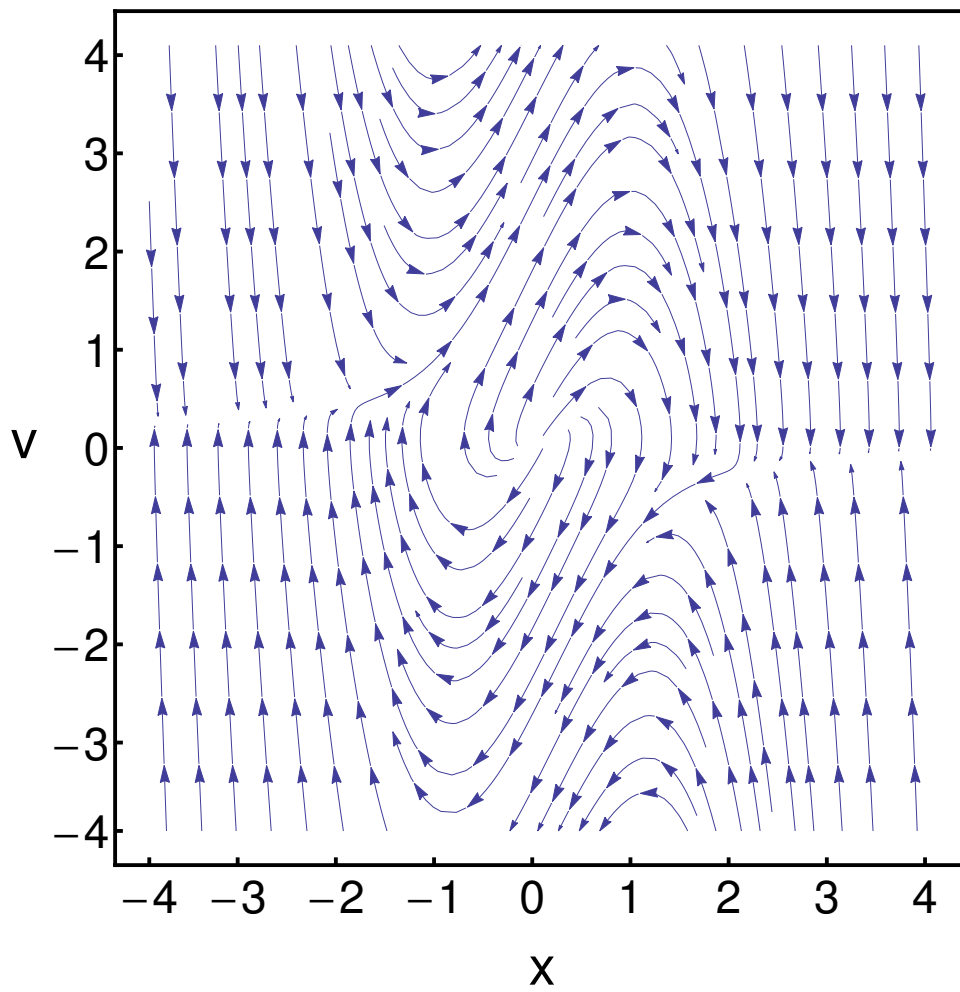
Dla  $K = 0$  układ jest liniowy z wartościami własnymi  $\mu \pm \omega i$ . Zmiana stabilności położenia równowagi w zerze następuje wraz ze zmianą znaku  $\mu$ . Przy  $\mu > 0$  otrzymujemy ognisko niestabilne, przy  $\mu < 0$  stabilne, a przy  $\mu = 0$  centrum. Zgodnie z zasadą, że w układach liniowych nie ma cykli granicznych, istotnie cykle takie się tu nie pojawiają.

Dla  $K \neq 0$ , pożytecznie jest napisać układ (21) we współrzędnych biegunowych. Podstawiając  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$  otrzymujemy

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2} = \omega$$



Rysunek 17: Wykres cykli granicznych dla oscylatora Van der Pola ( $\mu = 0.5$  nieb,  $\mu = 1$  czerw.  $\mu = 2$  ziel.)



Rysunek 18: Diagram fazowy dla rwnania oscylatora Van der Pola ( $\mu = 2$ ).

i analogicznie,

$$\frac{dr}{dt} = \mu r + Kr^3 . \quad (23)$$

Jest to zatem układ podobny do oscylatora Van der Pola, ale prostszy w analizie, ponieważ zmienne we współrzędnych biegunowych rozdzielają się.

Dla  $K < 0$  i  $\mu < 0$  zero jest asymptotycznie stabilne i przyciąga każdą orbitę. Dla  $\mu = 0$  w drugim równaniu  $r = 0$  pozostaje stabilnym punktem punktem równowagi, a zatem każda orbita nadal przyciągana jest do zera, choć już nie po spirali logarytmicznej. Przy  $\mu > 0$  punkt  $r = 0$  staje się odpychający, a za to pojawia się punkt przyciągający w  $\hat{r} = \sqrt{\frac{\mu}{K}}$ . Zatem orbity zaczynające się z początkowym  $r$  między 0 a  $\hat{r}$  będą się “odwijać” i dążyć do cyklu granicznego w  $r = \hat{r}$ , a kolei orbity zaczynające się z  $r > \hat{r}$  będą się “zwijać” w stronę tego cyklu. Ten mechanizm, w którym asymptotycznie stabilny punkt równowagi traci stabilność, a na jego miejsce rodzi się asymptotycznie stabilny cykl graniczny, nazywa się *superkrytyczną bifurkacją Hopfa*.

Inna sytuacja ma miejsce przy  $K > 0$ . Tutaj dla  $\mu < 0$  punkt  $r = 0$  jest nadal stabilnym położeniem równowagi, ale istnieje też niestabilne położenie równowagi w  $\hat{r} = \sqrt{-\frac{\mu}{K}}$ . Oznacza istnienie *odpychającego* cyklu granicznego w  $r = \hat{r}$ . Kiedy  $\mu = 0$ , cykl ten kurczy się do punktu i już go nie ma, natomiast zmienia się stabilność punktu równowagi w zerze, który teraz jest globalnie odpychający, tj. przyciąga każdą orbitę w tył. Ta sytuacja nie zmienia się dla  $\mu > 0$ . Ten proces zniszczenia odpychającego syklu granicznego nazywa się *subkrytyczną bifurkacją Hopfa*.

Stosując te pojęcia do opisu organizmów żywych w żartobliwy sposób, wyobraźmy sobie osobnika kroczącego chodnikiem i popijającego napój alkoholowy. Idzie początkowo prosto, ale w pewnym momencie zacznie się zataczać - to miała miejsce superkrytyczna bifurkacja Hopfa. Bifurkacja subkrytyczna wydarzy się, gdy zacznie on mieć kłopoty już nie z kierunkiem marszu, ale z utrzymaniem się w pozycji stojącej. Zacznie się wóczas chwiać i o ile nie przekroczy pewnej granicy, to wróci do stabilnej pozycji pionowej, ale po jej przekroczeniu upadnie. W granicznej pozycji wystąpi wyraźne kolebanie lub dreptanie w miejscu w celu złapania równowagi, a to właśnie niestabilny cykl graniczny. Wreszcie przy dalszej utracie stabilności ów cykl graniczny kurczy się do punktu i po bifurkacji subkrytycznej upadek staje się nieuchronny.

### 3.4 Bifurkacja homokliniczna.

Innym sposobem narodzin cyklu granicznego może być bifurkacja homokliniczna. W celu zilustrowania tego zjawiska rozważmy układ:

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (24)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - x^2 + y(6x^2 - 4x^3 - 6y^2 + 12\mu). \quad (25)$$

Do badania tego układu użyjemy funkcji testowej

$$L(x, y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2}.$$

Otrzymujemy, że

$$\frac{dL}{dt} = -12y^2(L - \mu). \quad (26)$$

Istnieje zatem krzywa  $L(x, y) = \mu$ , która jest zachowywana przez potok równania. Dla  $\mu = 0$  początek układu leży na krzywej  $L = 0$ . Krzywa ma kształt kokardki i przecina się sama z sobą w zerze ze stycznymi  $y = \pm x$ . Początek układu jest punktem siodłowym z lokalną rozmaitością stabilną styczną do krzywej  $y = -x$ , a niestabilną do  $y = x$ . Zamknięta gałąź krzywej  $L = 0$  jest jednocześnie rozmaitością stabilną i niestabilną punktu siodłowego w zerze. Taka krzywą nazywamy *pętlą homokliniczną*. Mamy  $L < 0$  w obszarze  $A$  ograniczonym pętlą homokliniczną oraz w nieograniczonym obszarze wierzchołkowym do niego w zerze, zaś  $L > 0$  w spójnym obszarze dopełniającym. Orbity z obu obszarów dążą do krzywej  $L = 0$ . Nie jest jednak ona cyklem granicznym, ponieważ nie jest w ogóle orbitą okresową. Pętla homokliniczna jest orbitą, której zbiór zarówno  $\alpha$ - jak i  $\omega$ -graniczny jest zerem. Stosując twierdzenie Poincaré-Bendixsona, tj. Twierdzenie 3.1, do zbioru  $\overline{A}$  otrzymujemy przykład, kiedy zachodzi przypadek trzeci tego twierdzenia. Wewnątrz  $A$  znajduje się odpychający punkt równowagi  $(1, 0)$ , będący przy tym minimum globalnym funkcji  $L$ , a każda inna orbita odwija się okrążając go nieskończenie wiele razy i zbliżając się do pętli homoklinicznej.

Kolejna sytuacja warta uwagi zachodzi przy  $-\frac{1}{6} < \mu < 0$ . Wówczas jedna ze składowych spójnych zbioru  $L = \mu$  jest gładką krzywą zamkniętą leżącą w

obszarze  $A$ . Ponieważ krzywa ta jest niezmiennicza (bo  $L$  ma na niej zerową pochodną), z twierdzenia Poincaré-Bendixsona musi być orbitą zamkniętą. Orbita ta jest asymptotycznie stabilnym cyklem granicznym, co wynika z formuły (26). W szczególności rozmaite zera nawijają się na nią.

Wreszcie dla  $\mu > 0$  krzywa  $L = \mu$  jest spójna i gładka, lecz nieograniczona. Przyciąga ona każdą inną orbitę za wyjątkiem punktów równowagi, zatem nie ma tej sytuacji orbit okresowych.

Podsumowując obrazowo ten proces dla  $\mu$  przechodzącego od wartości ujemnych do dodatnich widzimy, że przedstawia on zniszczenie cyklu granicznego w zderzeniu z siodłem. Siodło to znajduje się początkowo na zewnątrz cyklu, zbliża się do niego, w momencie bifurkacji cykl graniczny staje się pętlą homokliniczną, a następnie rozpada. Wyobraźmy sobie wahadło z siłą wymuszającą działającą w pobliżu dolnego położenia równowagi, jak w huśtawce, którą rozpędza ktoś stojący obok na ziemi. O ile osoba to działa w ramach rozsądku, to podtrzymuje stabilne wahania - cykl graniczny. Przy wzroście jego oddziaływania amplituda wahań rośnie. Wreszcie nadchodzi graniczny moment, kiedy huśtawkaomalże wspina się do górnego położenia równowagi, ale jeszcze go nie osiąga w skończonym czasie. Nigdy zatem nie wraca na dół - to pętla homokliniczna. Potem huśtawka zaczyna kręcić się poprzez górne położenie równowagi stale w jedną stronę, a zatem jej ruch wahadłowy został zniszczony przez bifurkację homokliniczną.

### Ćwiczenia i laboratoria.

**Reakcja chemiczna.** Zbadać numerycznie model pewnej reakcji chemicznej, zwanej reakcją Bielousowa-Żabotyńskiego:

$$\begin{aligned}\epsilon \frac{dx}{dt} &= y - xy + x(1 - qx) \\ \frac{dy}{dt} &= -y - xy + 2fz \\ \frac{dz}{dt} &= \delta(x - z),\end{aligned}$$

gdzie  $\epsilon, q, f > 0$ , zaś  $0 < \delta < 1$ . Znaleźć wartości parametrów, dla których występuje bifurkacja Hopfa oraz stwierdzić, kiedy istnieje cykl graniczny. O ile możliwe, poprzeć rezultaty wyliczeniami analitycznymi. Pytanie to ma charakter otwarty, ponieważ raczej nie oczekujemy pełnej odpowiedzi, ale możliwie pełnej analizy.

**Bifurkacja homokliniczna.** Rozważyć następujący układ równań:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x - 2x^3 + y(\mu + x^2 - x^4 + y^2).\end{aligned}$$

Posiłkując się funkcją  $L(x, y) = -x^2 + x^4 + y^2$  wykazać, o ile możliwe analitycznie, że przy  $\mu = 0$  istnieją dwie pętle homokliniczne. Zbadać numerycznie ich bifurkację dla wartości  $\mu$  dodatnich i ujemnych bliskich 0,  $\mu = \pm \frac{1}{10}$ . Znaleźć cykle graniczne, zbiory graniczne różnych punktów oraz otrzymać portrety fazowe.

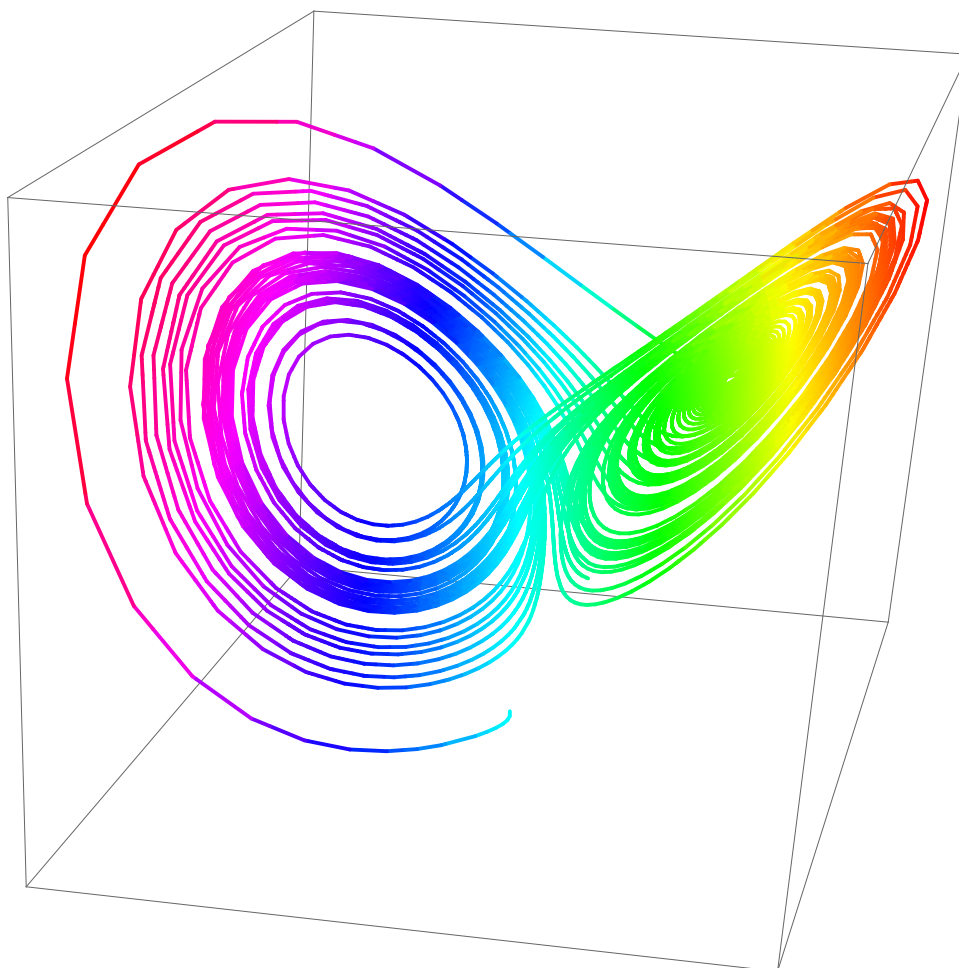
Alternatywnie, poprzez dyskusję układu (24) z wykładu rysunkami i wyliczeniami.

## 4 Chaos i atraktory chaotyczne

Pojęcie chaosu można intuicyjnie odnieść do tak zwanego efektu motyla. Sformułowanie to zostało użyte przez E. Lorenza w opisie jego badań nad modelami meteorologicznymi. Stwierdził on, że motyl machając skrzydełkami w Australii mógłby spowodować tornado w USA miesiąc później. Jest to niewątpliwie paradoks, jeśli wziąć pod uwagę choćby wielkość energii obu zdarzeń. Niemniej Lorenz pokazał model, w którym coś takiego się wydarza. A konkretnie, małe zaburzenie warunków początkowych szybko narasta powodując po pewnym czasie dużą zmianę zaburzonego rozwiązania. Nie jest to specjalnie zaskakujące, o ile niezaburzone rozwiązanie w jakimś sensie dąży do nieskończoności: np. w jednowymiarowym modelu wzrostu populacji bakterii jest jasne, że dodanie zaledwie jednej do warunku początkowego po jakimś czasie zaskutkuje milionem. Jednak pogoda tak się nie zachowuje, lecz zawsze pozostaje w pewnej ograniczonej dziedzinie parametrów, a jednak nadal w jej prostych nawet modelach pojawiają się zachowania chaotyczne. Portret fazowy układu Lorenza jest zilustrowany na Rysunku 19).

### 4.1 Atraktor Lorenza.

Jak wiemy z twierdzenia Poincaré - Bendixsona, zachowania graniczne orbit w modelach z dwoma parametrami są dość proste: muszą one dążyć do cykli granicznych. Od pewnego momentu zatem rozwiązanie zaczyna obiegać ten



Rysunek 19: Portret fazowy rwnania Lorenza dla parametrw  $\sigma = 10$ ,  $r = 30$  i  $b = \frac{8}{3}$ .

cykl i trudno tu mówić o chaosie. Potrzeba zatem minimum trzech stopni swobody. Model Lorenza jest właśnie trójparametrowy i ma następującą postać:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \quad (27)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz \quad (28)$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy, \quad (29)$$

gdzie  $\sigma, r, b > 0$ . Lorenz ustalił wartości  $\sigma = \sigma_0 = 10$ ,  $b = b_0 = \frac{8}{3}$  i różne  $r$ . Układ Lorenza jest prostym opisem zjawiska obiegu powietrza w komórkach konwekcyjnych. Przy obecności gradientu temperatury tworzą się prądy wznoszące i zstępujące tworzące razem pewien cykl. Parametr  $x$  układu Lorenza jest częstotliwością obiegu w komórce konwekcyjnej, której znak odpowiada kierunkowi obiegu, zaś  $r$  jest proporcjonalny tzw. liczby Rayleigha mierzącej udział konwekcji w porównaniu do przewodnictwa w rozchodzeniu się ciepła w płynie. Przy małej wartości  $r$  zjawisko cyklicznego obiegu w ogóle nie występuje, gdyż konwekcja jest zbyt słaba. Pojawia się ono wraz z bifurkacją dla  $r > 1$ . Chaotyczny charakter zjawiska objawia się możliwością zmiany znaku  $x$ , co oznacza zmianę kierunku obiegu powietrza. Zmiany takie są obserwowane przez meteorologów w formujących się komórkach konwekcyjnych i były opisywane jako “przypadkowe”.

Początek układu jest punktem równowagi i daje się nietrudno policzyć linearyzując oraz równanie charakterystyczne macierzy układu zlinearyzowanego:

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0.$$

Daje to dwie wartości własne, które są zawsze ujemne oraz jedną, która zmienia znak w zależności od  $r$ , będąc ujemna dla  $0 < r < 1$  i dodatnia dla  $r > 1$ . Dla  $r < 1$  otrzymujemy funkcję Lapunowa

$$L_1(x, y, z) = \frac{x^2}{2\sigma} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2},$$

która jest określona globalnie i ściśle malejąca wzdłuż orbit układu poza punktem równowagi. Wynika stąd, że dla  $r < 1$  punkt  $(0, 0, 0)$  jest globalnym atraktorem, tzn. dowolna orbita do niego dąży.

Przypadek  $r > 1$  jest bardziej skomplikowany i ciekawszy. Do jego badań można użyć funkcji testowej

$$L_2(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2}{2}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{dL_2}{dt} = -\sigma x^2 - y^2 - b \left( z - \frac{r + \sigma}{2} \right)^2 + \frac{b(r + \sigma)^2}{4}.$$

Zatem  $\frac{dL_2}{dt} < 0$  o ile

$$\sigma x^2 + y^2 + b \left( z - \frac{r + \sigma}{2} \right)^2 > \frac{b(r + \sigma)^2}{4}. \quad (30)$$

Równość w warunku (30) opisuje pewną elipsoidę  $E$ . Zakładając  $\sigma > 1$  i  $b < 4$  można wykazać, że maksymalna wartość  $L_2$  na elipsoidzie jest przyjęta w punkcie  $(0, 0, 0)$  i wynosi  $\frac{(r+\sigma)^2}{2}$ . Wybierzmy pewne  $C_2 > \frac{(r+\sigma)^2}{2}$  i rozważmy obszar (kulę)

$$U_2 = \{(x, y, z) : L_2(x, y, z) < C_2\}$$

$U_2$  jest nazywany *rejonem wychwytyjącym*, ponieważ żadna orbita układu Lorenza zadanego przez (27) zaczynająca się w  $U_2$  nie może zeń uciec. O ile jest na zewnątrz elipsoidy  $E$ , to wartość  $L$  tylko spada i orbita pogrąża się głębiej w  $U_2$ . Jeśli zaś znajdzie się na brzegu lub wewnątrz  $E$ , to automatycznie pozostaje w  $U_2$ , ponieważ  $C_2$  przekracza maksymalną wartość w domknięciu elipsoidy. Co więcej, ponieważ brzeg  $U_2$  znajduje się na zewnątrz elipsoidy, czyli w obszarze, w którym pochodna  $L_2$  wzdłuż orbit jest ujemna, to każda orbita zaczynająca się na brzegu natychmiast wchodzi w  $U$ . Oznaczając teraz przy  $\phi^t(x)$  potok tego układu, rozważmy zbiór

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \phi^t(\bar{U}_2).$$

Jest pewnym zbiorem zwartym, niezmienniczym ze względu na potok, tj.  $\phi^t(A) = A$  dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$  i nazywa się *zbiorem przyciągającym* dla  $U_2$ . W ten sposób każdy rejon wychwytyjący generuje zbiór przyciągający.

**Przypadek ogólny.** Rozważmy teraz bliżej ogólne pojęcia, które się pojawiły w dyskusji na układem Lorenza. Zakładamy jedynie istnienie pewnego gładkiego potoku  $\phi^t$  zdefiniowanego dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definicja 4.1** *Rejonem wychwytyjącym nazwiemy dowolny zbiór otwarty, niepusty i zawarty w zbiorze zwartym taki, że dla każdego  $t > 0$  zachodzi  $\phi^t(\bar{U}) \subset U$ .*

**Definicja 4.2** *Zbiór przyciągający dla pewnego rejonu wychwytyjącego  $U$  jest zdefiniowany poprzez*

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \phi^t(U) .$$

*Powiemy po prostu, że  $A$  jest przyciągający, jeśli istnieje pewien rejon wychwytyjący, dla którego powyższa równość zachodzi.*

**Definicja 4.3** *Zbiór przyciągający nazywa się atraktorem, jeśli jest minimalny w sensie inkluzji, to znaczy nie zawiera zbioru przyciągającego różnego od samego siebie.*

Zachodzi przy tym następujące ogólne twierdzenie.

**Twierdzenie 4.1** *Przypuśćmy, że  $A$  jest zbiorem przyciągającym z rejonem wychwytyjącym  $U$ . Zachodzą wówczas następujące własności.*

- *$A$  jest domknięty i  $\phi^t(A) = A$  dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ .*
- *O ile  $x_0 \in U$ , to  $\omega(x_0) \subset A$ .*
- *Jeśli  $x_0$  jest hiperbolicznym punktem równowagi w  $A$ , to  $A$  zawiera rozmaitość niestabilną  $x_0$ .*

Z powyższego twierdzenia wynika, że struktura zbioru przyciągającego skonstruowanego dla układu Lorenza przy  $r > 1$  większym od 1 jest dość skomplikowana, ponieważ musi on zawierać rozmaitość niestabilną punktu siodłowego w początku układu współrzędnych. Rozmaitość ta jest uwięziona w rejonie wychwytyjącym, zatem ograniczona. Jednocześnie wzdłuż rozmaitości niestabilnej zachodzi rozciąganie, a zatem należy oczekiwać na  $A$  zachowań chaotycznych.

## 4.2 Atraktory chaotyczne.

Rozpocznijmy od matematycznego sformułowania “efektu motyla”. W tym celu założymy, że dany jest gładki potok  $\phi^t$  na pewnym otwartym podzbiórze  $M$  w przestrzeni euklidesowej, lub ogólniej na rozmaitości riemannowskiej, który jest zdefiniowany dla wszystkich czasów.

**Definicja 4.4** *Model wykazuje czułą zależność od warunków początkowych w punkcie  $x_0$ , jeśli istnieje takie  $\epsilon_0 > 0$ , że dla każdego  $\delta > 0$  istnieje pewne  $x$  takie, że  $\|x - x_0\| < \delta$  oraz istnieje czas  $\tau > 0$ , dla którego  $\|\phi^\tau(x) - \phi^\tau(x_0)\| \geq \epsilon_0$ .*

Zauważmy, że warunek czulej zależności od warunków początkowych w punkcie jest niczym innym, jak zaprzeczeniem stabilności w sensie Lapunowa dla orbity  $x_0$ .

**Definicja 4.5** *Jeśli dany jest zbiór  $S \subset M$  to mówimy, że potok  $\phi^t$  wykazuje czułą zależność ze względu na warunki początkowe na  $S$ , o ile istnieje  $\epsilon_0 > 0$  taki, iż dla każdego  $\delta > 0$  oraz każdego  $x_0 \in S$  istnieją  $x$  i  $\tau > 0$  takie, że  $\|x - x_0\| < \delta$ , ale  $\|\phi^\tau(x) - \phi^\tau(x_0)\| \geq \epsilon_0$ .*

Zatem w definicji czulej zależności na zbiorze występuje jednostajność polegająca na tym, że  $\epsilon_0$  jest wspólne dla wszystkich  $x_0 \in S$  i stąd jest ona własnością silniejszą od czulej zależności w każdym punkcie zbioru  $S$  w sensie Definicji 4.4.

**Definicja 4.6** *Jeśli  $A$  jest niezmienniczy pod działaniem potoku, to czuła zależność na warunki początkowe po obcięciu do  $S$  zachodzi, jeśli w Definicji 4.5 wymagamy dodatkowo, aby  $x \in S$ .*

Numerycznie można pokazać, że na zbiorze przyciągającym  $A$ , który zbudowaliśmy w poprzednim fragmencie wykładu, model Lorenza wykazuje czułą zależność od warunków początkowych po obcięciu do tego zbioru.

**Definicja 4.7** *Atraktor  $A$  nazwiemy chaotycznym, o ile wykazuje on czułą zależność ze względu na warunki początkowe po obcięciu do  $A$ .*

**Atraktor chaotyczny dla wymuszonych oscylacji.** Opiszemy teraz inny typ atraktora chaotycznego, odkryty historycznie z podobnym czasem i niezależnie od atraktora Lorenza. Rozważmy równanie Duffinga

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} - x + x^3 = F \cos(\omega t) ,$$

gdzie  $\delta > 0$ . Lewa strona opisuje oscylator tłumiony (ze względu na człon  $\delta$ ) w polu potencjału  $V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ . Przy  $F = 0$ , a zatem braku siły wymuszającej, obserwujemy trzy punkty równowagi:  $x = 0$ , który jest lokalnym maksimum  $V$ , a z punktu widzenia dynamicznego siodłem oraz dwa stabilne scieki w minimach potencjału w punktach  $\pm 1$ . Każde rozwiązanie z wyjątkiem tych, które tworzą rozmaitość stabilną punktu siodłowego, zbiega do któregoś z minimów.

Dla małych  $F$  sytuacja nie ulega jakościowo zmianie. Równanie definiuje potok w płaszczyźnie  $(x, y)$ , gdzie  $y = \frac{dx}{dt}$ . Układ ten można starać się zrozumieć badając przekształcenie Poincarégo  $\Phi(x, y) = \phi^{\frac{2\pi}{\omega}}(x, y)$  odpowiadające ewolucji układu po jednym okresie siły wymuszającej. Ponieważ  $\delta > 0$ , to linearyzacja tego przekształcenia wokół każdego rozwiązania ma wyznacznik mniejszy od 1 ze wzoru Abela. Wyznacznik ten dla  $\Phi$  jest jakobianem, a zatem  $\Phi$  kurczy powierzchnię każdego przekształcanego zbioru. Dla odpowiednio dużej wartości  $F$  staje się możliwy przeskok rozwiązania z jednej jamy potencjału do drugiej. Jednocześnie kurczenie powierzchni sprawia, że powstaje pewien obszar wychwytyjący, wewnątrz którego powstaje chaotyczny atraktor. Zjawiska te można prześledzić numerycznie. Każda orbita tego atraktora nieskończenie wiele razy przeskakuje z jednej jamy potencjału do drugiej, a czuła zależność ze względu na warunki początkowe objawia się tym, że dowolnie małą zmianą warunku początkowego można doprowadzić do tego, iż w pewnym momencie orbity znajdą się w różnych jamach.

**Chaos w rodzinie kwadratowej - przypadek czasu dyskretnego.** Dla modeli z czasem dyskretnym pojęcia atraktora oraz czulej zależności definiuje się tak samo tyle, że zamiast potoku  $\phi^t$  należy użyć iteracji  $f^n$  pewnego pewnego przekształcenia  $f$ . Dla rodziny kwadratowej  $f_a(x) = ax(1 - x)$  wiadomo, że na zbiorze parametrów  $a$ , który ma miarę dodatnią, lecz puste wnętrze, istnieje atraktor chaotyczny będący cyklem skończenie wielu odcinków domkniętych  $I_0, \dots, I_n$ , przy czym  $f_a(I_j) = I_{j+1}$ , zaś  $I_0 = I_n$ . Jest to jedyny możliwy typ atraktora chaotycznego w rodzinie kwadratowej.

### 4.3 Wykładniki Lapunowa.

Infinitymalnym odpowiednikiem czulej zależności ze względu na warunki początkowe są wykładniki Lapunowa. Wykładniki Lapunowa są przy tym generalnie znacznie łatwiejsze do zbadania numerycznego.

Przypomnijmy z kursu równań różniczkowych zwyczajnych, że potok  $\phi^t(x)$  autonomicznego równania różniczkowego  $\frac{dx}{dt} = F(x)$  na  $\mathbb{R}^m$  ma pochodną  $D\phi^t(x)$  względem warunku początkowego  $x$  i pochodna ta spełnia liniowe równanie na wariację względem czasu:

$$\frac{d}{dt}D\phi^t(x) = DF(\phi^t(x))D\phi^t(x). \quad (31)$$

Można też wyliczyć wartość  $D\phi^t(x)$  na wektorze  $v$  jako pochodną kierunkową:

$$D\phi^t(x)v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi^t(x + sv) - \phi^t(x)}{s}.$$

**Definicja 4.8** *Wykładnik Lapunowa dla warunku początkowego  $x_0$  w kierunku wektora niezerowego  $v$  definiujemy jako*

$$\ell(x_0, v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|D\phi^t(x_0)v\|}{t}$$

*zakładając, że granica ta istnieje.*

Zatem wykładnik Lapunowa mierzy wykładnicze tempo rozbiegania się pobliskich orbit w czasie. Widać prosto z definicji, że wartość wykładnika Lapunowa nie zmienia się przy pomnożeniu  $v$  przez niezerowy skalar. Zachowanie wykładników Lapunowa dla orbit należących do pewnego obszaru ograniczonego i niezmienniczego (np. wychwytyjącego) opisuje twierdzenie Oseledca. Nie będziemy go tu formalnie cytować, ale wspomnimy, że dla ustalonego  $x_0$  przy różnych  $v$  istnieje co najwyżej  $m$  różnych wartości wykładników Lapunowa i dla typowego punktu można je otrzymać jako granice  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda_i(t)}{t}$ , gdzie  $\lambda_i(t)$  są modułami wartości własnych macierzy  $D\phi^t(x)$  uporządkowanymi nierosnąco z uwzględnieniem krotności. Będziemy zatem oznaczając tak uporządkowane wykładniki Lapunowa w punkcie  $x_0$  poprzez  $\ell_i(x_0)$ . W typowym przypadku dla  $x_0$  istnieje baza wektorów  $v_i$  takich, że  $\ell_i(x_0) = \ell(x_0, v_i)$ . Można to elementarnie zilustrować w przypadku, gdy  $x_0$  jest punktem stałym. Wówczas wykładniki Lapunowa są częściami rzeczywistymi wartości własnych macierzy  $DF(x_0)$ , a  $v_i$  jej uogólnionymi wektorami własnymi.

Jeśli  $x_0$  nie jest punktem równowagi, to zazwyczaj z góry znany jest wykładnik Lapunowa w kierunku pola wektorowego  $F(x_0)$ . Jeśli założyć, że orbita punktu  $x_0$  jest ograniczona, a jej zbiór  $\omega$ -graniczny nie zawiera punktów równowagi, to  $\ell(x_0, F(x_0)) = 0$ . Wykładniki Lapunowa w kierunkach innych niż  $F(x_0)$  nazywają się *głównymi*.

Jeśli  $W(t) = |\det D\phi^t(x_0)|$ , to z formuły (31) i wzoru Liouville'a otrzymujemy, że

$$\frac{d \log W(t)}{dt} = \operatorname{tr} DF(\phi^t(x_0)).$$

W terminach  $F(x)$  rozumianego jako pole wektorowe, ślad macierzy  $DF(x)$  jest dywergencją tego pola w punkcie  $x$ . Ponieważ granica  $\log W(t)$  daje sumę wykładników Lapunowa w typowym punkcie, to dla takiego punktu otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n \ell_i(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tr} DF(\phi^t(x_0))}{t}. \quad (32)$$

Dywergencja pola jest często łatwa do wyznaczenia z postaci równania i może być stała, wówczas wystarczy wyznaczyć  $m - 2$  głównych wykładników Lapunowa, aby określić pozostałe.

**Algorytm numeryczny wyznaczania wykładników Lapunowa.** Dla przypadkowo wybranego wektora  $v$  otrzymamy  $\ell(x_0, v) = \ell(x_0, v_1)$  chyba, że w rozwinięciu  $v$  w bazie  $(v_i)$  wektor  $v_1$  nie występuje. Dzieje się tak dlatego, że  $v_1$  jest najsilniej rozciągany przez  $D\phi^t(x_0)$  i dla dużych  $t$  dominuje pozostałe wektory bazowe występujące w rozwinięciu  $v$ . Podobnie, jeśli  $v$  i  $w$  są wektorami ortogonalnymi, to wykładnicze tempo wzrostu pola rozpiętego przez nie prostokąta pod działaniem  $D\phi^t(x_0)$  będzie dane przez sumę  $\ell_1(x_0) + \ell_2(x_0)$ .

Prowadzi to do następującego algorytmu dla wyznaczenia wykładników Lapunowa w  $x_0$ .

1. Wybierz pewien krok czasu  $0 < T$ .
2. Wybierz warunek początkowy  $x_0$  oraz ortonormalny układ wektorów  $(w_0^i)_{i=1}^m$ .
3. Rekurencyjnie, założmy, że dane są  $x_k$  w przestrzeni fazowej oraz ortonormalny układ wektorów  $(w_k^i)$ .

4. Zdefiniuj  $x_{k+1} = \phi^T(x_k)$  oraz  $\tilde{w}_{k+1}^i = D\phi^T(x_k)w_k^i$ . Następnie, otrzymaj  $w_{k+1}^i$  z  $\tilde{w}_{k+1}^i$  poprzez ortogonalizację Grama-Schmidta.

$$\text{Wówczas } \ell_i(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \|w_k^i\|}{kT}.$$

**Test Alligooda-Sauera-Yorke’a na chaos.** Następujący test pozwala eksperymentalnie stwierdzić, czy zbiór przyciągający  $A$  jest chaotycznym atraktorem. Aby nim był, powinny być spełnione wszystkie następujące warunki:

1. Dla wielu różnych orbit  $x_i$ ,  $\omega(x_i) = A$ . Słowo “wielu” oznacza z dodatnim prawdopodobieństwem przy losowym wyborze z obszaru wychytującego według jakiegoś sensownego rozkładu, np. miary Lebesgue’a.
2. Co najmniej jeden wykładnik Lapunowa dla przynajmniej jednej z tych orbit jest dodatni.
3. Wszystkie główne wykładniki Lapunowa tej orbity są niezerowe.

#### 4.4 Ćwiczenia i laboratoria.

**Prosty przykład.** Przeanalizować następujący układ równań zadany we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r(1 - r^2)(r^2 - 4) \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1. \end{aligned}$$

Naszpicować portret fazowy, znaleźć zbiory przyciągające i atraktory.

Czy układ ten wykazuje czułą zależność od warunków początkowych dla zbiorów  $\{(r, \theta) : r = 1\}$  i  $\{(r, \theta) : r = 2\}$ ? Czy odpowiedź jest taka sama, jeśli idzie o czułą zależność po obcięciu do tych zbiorów? Czy któryś z tych zbiorów jest chaotycznym atraktorem?

**Przykład skomplikowany.** Rozważyć równanie Duffinga

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^3 - \delta y + F \cos(\omega t)\end{aligned}$$

dla  $F = 0.4$ ,  $\delta = 0.25$  i  $\omega = 1$ . Znaleźć obszar wychwytyjący - eksperymentalnie lub argumentując, że kula o odpowiednio dużym promieniu jest takim obszarem. Uzasadnić, że odpowiedni zbiór przyciągający ma miarę zero. Rozstrzygnąć testem Alligooda-Sauera-Yorke'a, czy jest on atraktorem chaotycznym, w szczególności wyznaczając wykładniki Lapunowa dla jakiejś orbity zbieżnej do  $A$  algorytmem podanym na wykładzie i sprawdzając zgodność rezultatu z formułą (32). Dla uatrakcyjnienia zadania, różni studenci mogą je opracować dla nieco różniących się wartości parametrów.

## 5 Podejście statystyczne

### 5.1 Zachowania pseudo-stochastyczne w układach deterministycznych.

Rozważmy model o silnie zaznaczonych cechach chaotycznych. Prostim przykładem może tu być rodzina namiotowa

$$g_a(x) = -a|x - \frac{1}{2}| + \frac{a}{2}, \text{ gdzie } x \in [0, 1] \quad (33)$$

dla  $a = 2$ . Wykładnik Lapunowa jest tu  $\log 2$ , a zatem niedokładność wyznaczenia warunków początkowych narasta w po  $k$  iteracjach w stosunku  $2^k$ . Jeśli chcemy przewidywać zachowanie układu po 50 iteracjach, to nawet znajomość warunku początkowego z dokładnością do  $10^{-9}$ , czyli powiedzmy rozmiaru pojedynczego atomu, daje błąd przewidywania  $10^6$ , a więc absurdalnie duży. Przy tym, zaniedbaliśmy w ogóle błędy numeryczne wynikające z samej procedury obliczania w modelu. Z wartości wykładnika Lapunowa wynika po prostu, że przewidywanie w takim modelu jest praktycznie niemożliwe ze względu na samą tylko ograniczoną precyzję wyznaczenia warunków początkowego. Tak więc deterministyczny charakter modelu nie przesądza jeszcze w ogólności, że na jego podstawie można będzie dokonywać deterministycznych prognoz.

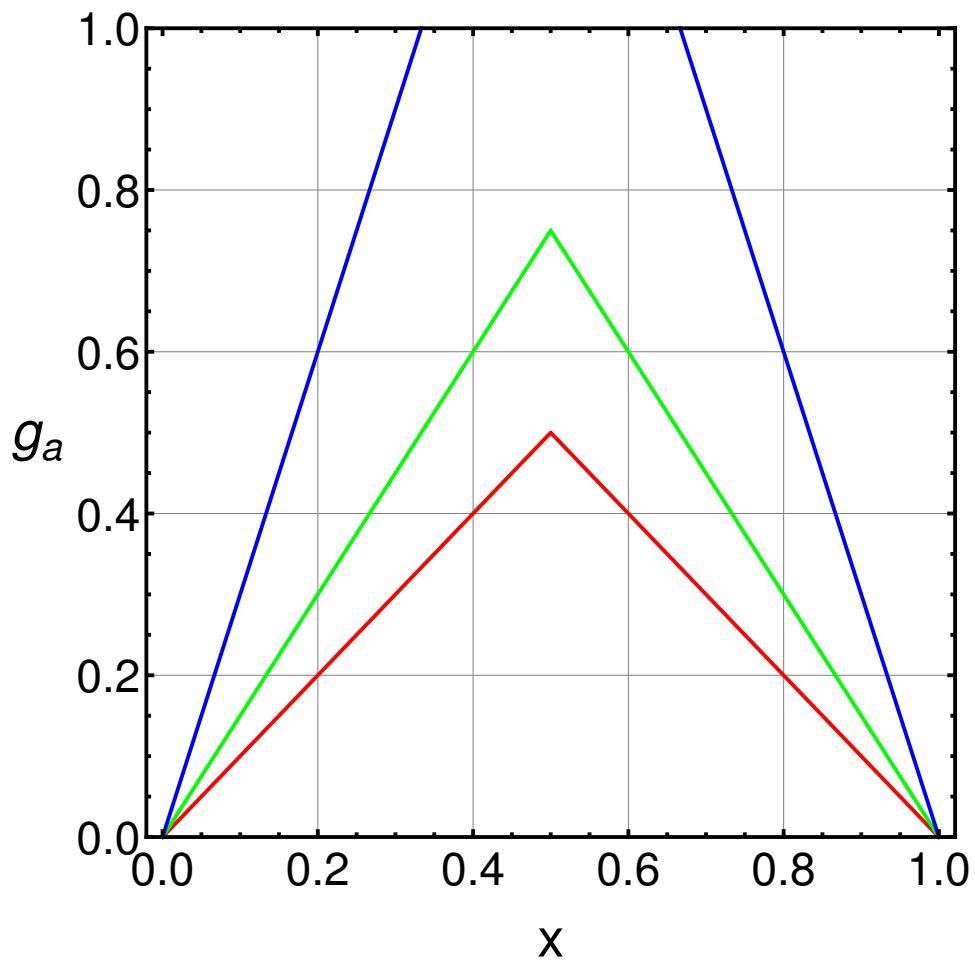
W tej sytuacji paradoksalnym, ale w praktyce sensownym, wyjściem może być rezygnacja z przewidywania deterministycznego na rzecz prognoz statystycznych. Z punktu widzenia formalnego, oznacza to potraktowanie przestrzeni fazowej modelu, w tym przypadku odcinka  $[0, 1]$  jako przestrzeni probabilistycznej z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa zadany miarą borelowską  $\mu$ , zaś warunek początkowy i co za tym idzie jego obrazy przy iteracjach jako zmienne losowe. Z punktu widzenia matematycznego zmienna losowa jest niczym innym jak funkcją na przestrzeni probabilistycznej, a zatem jest “zdeterminowana” przez tę przestrzeń, jednak rozpatrując model z punktu widzenia statystycznego dokonujemy wyboru metodologicznego, aby traktować przestrzeń probabilistyczną jako zasadniczo nieznaną i ograniczyć się do formułowania sądów w terminach prawdopodobieństwa, tj. miary  $\mu$  zbiorów, a nie zbiorów jako takich, składających się z konkretnych punktów.

Dla otrzymania matematycznego opisu tej sytuacji zakładamy więc, że mamy przestrzeń probabilistyczną  $X$  z “miarą odniesienia”  $\mu$ . Ograniczamy się do zbioru miar bezwzględnie ciągłych względem  $\mu$ , a więc zadanych przez gęstości  $\gamma$ , będące funkcjami nieujemnymi w przestrzeni  $L_1(X, \mu)$  z normą  $\|\gamma\|_1 = 1$ . Podkreślmy, że dla samej miary odniesienia  $\mu$  nie zakładamy żadnej normalizacji, a w szczególności nie musi ona być skończona. Dynamikę reprezentuje przekształcenie  $S : X \rightarrow X$  o którym zakładamy, że jest mierzalne i nieosobliwe, tj.  $\mu(A) = 0$  implikuje  $\mu(S^{-1}(A)) = 0$ . Ważnym przypadkiem będzie dla nas sytuacja miary Lebesgue’a na pewnym zbiorze otwartym w przestrzeni euklidesowej oraz  $S$  będącego przekształceniem kawałkami  $C^1$ . Wykres funkcji namiotowej ilustruje Rysunek (20), a typowe zachowanie szeregów czasowych dla przedstawia Rysunek (21).

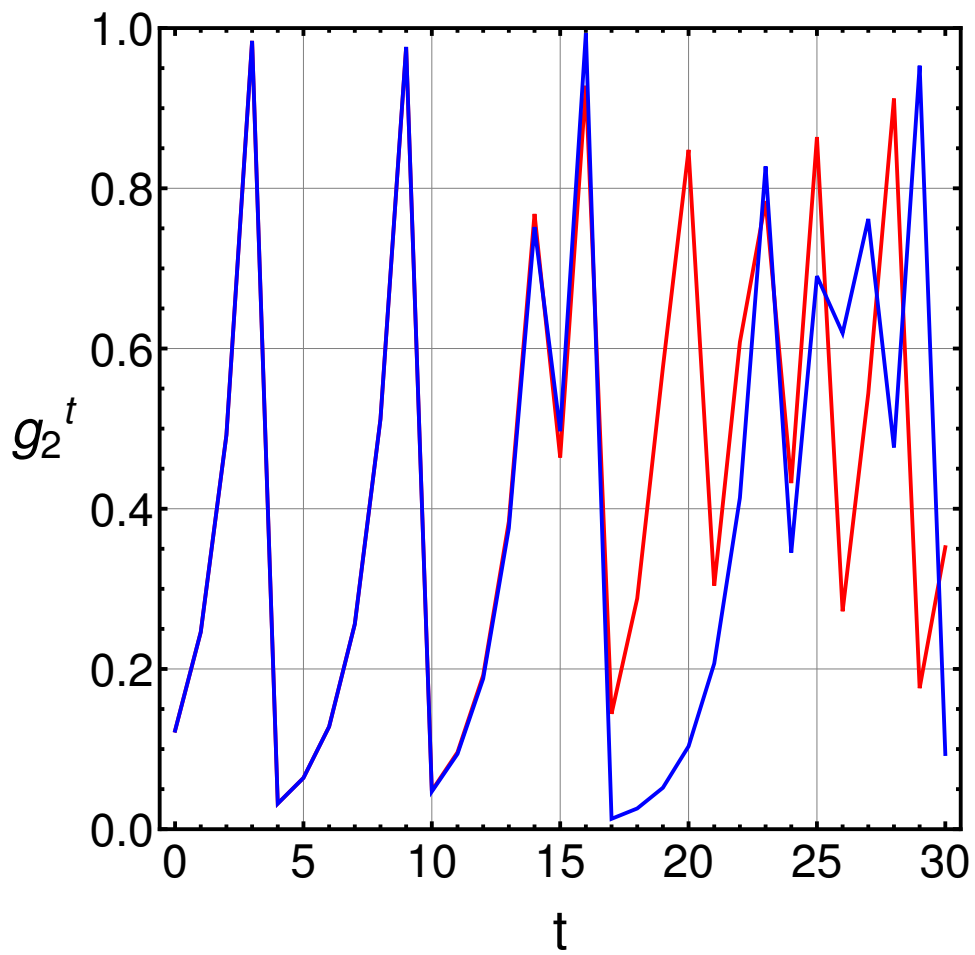
## 5.2 Operator Perrona-Frobeniusa.

Wyobrażamy sobie, że miara  $\gamma d\mu$  wyznacza rozkład prawdopodobieństwa dla warunku początkowego. W idealnej sytuacji rozkład ten byłby zadany deltą Diraca w pewnym punkcie, co odpowiadałoby precyzyjnej znajomości warunku początkowego. Jak jednak wynika z początkowej dyskusji, taka sytuacja nie jest realistyczna w praktycznych zastosowaniach, stąd nasze obecne założenie, że warunek początkowy jest zmienną losową zadaną według pewnego znanego rozkładu.

Deterministyczna dynamika modelu zadana przez  $S$  pozwala nam wtedy



Rysunek 20: Wykresy funkcji namiotowej  $g_a$  (wartoci  $a = 1$  czerw.  $a = 1.5$  ziel.  $a = 3$  nieb.)



Rysunek 21: Wykresy szeregów czasowych dla funkcji  $g_2$  (czerw.  $x_0 = 0.123$ , nieb.  $x_0 = 0.123001$ .)

wyrazić rozkład  $\nu$  dla  $S(x)$ :

$$\nu(A) = \int_{S^{-1}(A)} \gamma d\mu .$$

Warunek nieosobliwości  $S$  pozwala nam stwierdzić, że miarą  $\nu$  jest bezwzględnie ciągła względem miary  $\nu$ . To z kolei w myśl twierdzenia Radona-Nikodyma oznacza istnienie jednoznacznie określonej gęstości  $P\gamma$  takiej, że

$$\int_A P\gamma d\mu = \int_{S^{-1}(A)} \gamma d\mu \quad (34)$$

dla dowolnego zbioru mierzalnego  $A$ . Co więcej, warunek (34) definiuje  $P\gamma$  jednoznacznie nie tylko w sytuacji, gdy  $\gamma$  jest gęstością, tj. funkcją z przestrzeni  $L_1(X, \mu)$  o normie 1, ale także dla dowolnej funkcji  $f \in L_1(X, \mu)$ , tj.

$$\int_A Pf d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f d\mu \quad (35)$$

definiuje operator na przestrzeni  $L_1$ . Łatwo sprawdzić, że operator ten jest liniowy, jego norma wynosi 1 i jest on nieujemny, tj.  $f \geq 0$  prawie wszędzie implikuje to samo dla  $Pf$ . Dokładniej, operator ten jest zawsze Markowa w sensie poniższej definicji.

**Definicja 5.1** *Operator  $Q : L_1(X, \mu) \rightarrow L_1(X, \mu)$  nazywa się operatorem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest liniowy, nieujemny, oraz  $\|Pf\|_1 = \|f\|_1$  o ile tylko  $f \in L_1(X, \mu)$  jest funkcją nieujemną.*

Co więcej widać też od razu, że iteracje operatora  $P$  są związane z iteracjami  $S$ , a więc dla dowolnego  $n \geq 1$  mamy

$$\int_A P^n f d\mu = \int_{S^{-n}(A)} f d\mu .$$

Operator liniowy  $P : L_1(X, \mu) \rightarrow L_1(X, \mu)$  zadany formułą (35) nazywa się *operatorem Perrona-Frobeniusa* dla  $S$ . Jego wyznaczenie w sposób nadający się do efektywnych obliczeń jest w ogólności trudne. Istnieje jednak konkretna formuła dla funkcji  $S$ , które są kawałkami odwracalne.

**Definicja 5.2** Funkcja mierzalna  $S : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$  nazywa się bezwzględnie ciągłą, jeśli  $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(S(A)) = 0$ . W tym samym kontekście,  $S$  nazwiemy kawałkami odwracalną, jeśli istnieją zbiory mierzalne  $X_n \subset X$ , parami rozłączne i takie, że  $\mu(X \setminus \sum_{n=1}^{\infty} X_n) = 0$ , zaś dla każdego  $n$  przekształcenie  $S$  jest 1 – 1 po obcięciu do  $X_n$ .

Jeśli  $S$  jest kawałkami odwracalna, niechaj  $S_n^{-1}$  niech oznacza funkcję odwrotną na obraz  $X_n$ .

Przypomnijmy z analizy, że jeśli  $S$  jest bezwzględnie ciągła i kawałkami odwracalna, to dla każdego  $n$  istnieje jacobian  $J_n : X_n \rightarrow \mathbb{R}_+$  taki, że  $\mu(S(A)) = \int_A J_n d\mu$  dla każdego  $A \subset X_n$ . Z kolei nieosobliwość  $S$  oznacza dodatniość jacobianu. W przypadku, jeśli  $X$  leży w przestrzeni euklidesowej, ogólniej na orientowalnej rozmaitości, a odwracalne gałęzie  $S$  sa klasy  $C^1$ , to jacobian jest dany explicite jako wartość bezwzględna wyznacznika macierzy pochodnych cząstkowych.

**Twierdzenie 5.1** Jeśli przekształcenie  $S$  jest kawałkami odwracalne, bezwzględnie ciągłe i nieosobliwe, to jego operator Perrona-Frobeniusa jest zadany formułą

$$Pf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(S_n^{-1}(x)) J_n^{-1}(S_n^{-1}(x)).$$

Rozumie się przy tym, że jeśli dla pewnego  $n$  punkt  $x$  nie leży w dziedzinie  $S_n^{-1}$ , tj.  $x$  nie jest w obrazie  $S|_{X_n}$ , to odpowiedni wyraz sumy ma wartość 0.

Intuicyjnie,  $Pf(x)$  jest więc sumą po przeciwobrazach z wartości  $f$  ważoną wartościami jacobianu.

**Operator Perrona-Frobeniusa dla układów z czasem ciągłym.** W przypadku, gdy czas jest ciągły, deterministyczna dynamika modelu jest zadana poprzez półgrupę przekształceń  $(S_t)_{t \in [0, \infty)}$ . W takim przypadku nieosobliwość oznacza, że każde z przekształceń  $S_t$  jest nieosobliwe. Wówczas półgrupa operatorów Perrona-Frobeniusa  $(P_t)_{t \in [0, \infty)}$  zadana jest warunkiem

$$\int_A P_t f d\mu = \int_{S_t^{-1}(A)} f d\mu \tag{36}$$

dla każdego  $t$ . Jest to zgoła analogiczne do warunku (35). W istocie główna różnica między obu przypadkami polega na tym, że dla czasu dyskretnego

półgrupa  $(P_t)$  jest izomorficzna z  $\mathbb{Z}_+$  i generowana odpowiednio przez  $P$ . W przypadku ciągłym wyznaczenie generatora półgrupy  $(P_t)$  wymaga zastosowania dość zaawansowanego aparatu analitycznego, a mianowicie twierdzenia Hille'a - Yosidy i przekraczałyby ramy niniejszego wykładu. Poza tym, z punktu widzenia praktycznego, model z czasem ciągłym i tak zwykle się dyskretyzuje, wybierając pewne  $t_0 > 0$  jako "atom" czasu i rozpatrując dynamikę podgrupy generowanej przez  $S_{t_0}$ , która już całkowicie wpisuje się w formalizm dla czasu dyskretnego. Dlatego przypadkiem ciągłym nie będziemy się dalej zajmować.

### Gęstości niezmiennicze.

**Definicja 5.3** Funkcję  $\gamma \in L_1(X, \mu)$  nazwiemy gęstością, jeśli  $\gamma \geq 0$  i  $\|\gamma\|_1 = 1$ .

Szczególne znaczenie mają takie gęstości, które są zachowane przez operator Perrona-Frobeniusa, tj.  $P\gamma = \gamma$ . Jeśli teraz  $\phi$  jest wielkością obserwowalną, zadaną powiedzmy przez funkcję ciągłą na odcinku, to jej wartości po kolejnych iteracjach  $\phi \circ S^n$  możemy traktować jako zmienne losowe względem ustalonego rozkładu prawdopodobieństwa zadanego przez gęstość niezmienniczą.

W celu pokazania przykładu gęstości niezmienniczej można się łatwo przekonać na podstawie Twierdzenia 5.1, że dla przekształcenia namiotowego zadanego przez (33) gęstością taką jest funkcja stała równa 1. Jednak w typowym przypadku można tylko wykazać istnienie gęstości niezmienniczej i przybliżyć ją numerycznie, natomiast nie daje się znaleźć jej w sposób analityczny.

Pokazaliśmy zatem, dlaczego w chaotycznych modelach deterministycznych dokładne prognozowanie poza krótkim horyzontem czasowym może nie być możliwe. W takiej sytuacji warunek początkowy można traktować jako zadany rozkładem prawdopodobieństwa z pewną gęstością. Z kolei dynamika w przestrzeni fazowej ma swoje odbicie w dynamice na gęstościach, a ogólniej na przestrzeni  $L_1(X, \mu)$ , zadanej operatorem Perrona-Frobeniusa. Powstaje pytanie, które dalej będziemy rozpatrywać, w jakim stopniu ta dynamika pozwala na formułowanie statystycznych przewidywań dotyczących zachowania modelu, szczególnie w perspektywie długoterminowej.

### 5.3 Własności statystyczne.

O ile operator Perrona-Frobeniusa daje się efektywnie wyznaczyć, można wówczas próbować efektywnie wyliczyć ewolucję gęstości, poczynając od danego rozkładu warunku początkowego, pod jego działaniem. Otrzymuje się wtedy pewien ciąg gęstości, które zadają rozkłady prawdopodobieństwa dla stanu układu w momentach czasu w przyszłości. Jeśli na przykład astronomowie podają, że jakaś planetoida zderzy się z Ziemią powiedzmy za 156 lat z prawdopodobieństwem  $2 \cdot 10^{-5}$ , to w pierwszym momencie zdanie takie wydaje się bez sensu, ponieważ jej ruch jest całkowicie deterministyczny i wpadnie na nas lub nie, a trudno tu mówić o jakimś prawdopodobieństwie. Jeśli jednak uwzględnimy, że warunki początkowe nie są znane precyzyjnie, ale zadane początkową gęstością  $\gamma$ , to przytoczone zdanie uzyskuje jasny sens w odniesieniu do rozkładu prawdopodobieństwa  $P_{156}\gamma$ . W praktyce może to być jeszcze bardziej skomplikowane, ponieważ użyty model obliczeniowy zapewne nie obejmuje wszystkich ciał niebieskich, a więc dochodzą czynniki wynikające z elementów w nim zaniebanych, ale w tym momencie nie weźmiemy tego pod uwagę.

Rzecz prosta takie obliczenia są bardzo wymagające obliczeniowo, znacznie bardziej niż przewidywanie deterministyczne, ponieważ iterujemy w nieskończenie wymiarowej przestrzeni funkcyjnej. Przy tym, ogólna teoria niewiele w nich pomaga. Z punktu widzenia teoretycznego zajmijmy się teraz asymptotycznymi, a więc powiedzmy bardzo długoterminowymi cechami układu. Okazuje się bowiem, że w wielu sytuacjach znacznie łatwiej je badać niż konkretną ewolucję konkretnej gęstości.

Dyskusję tę przeprowadzimy zakładając istnienie pewnej gęstości niezmienniczej  $\gamma_0$ .

**Średnie czasowe i po przestrzeni fazowej.** Jedną z cech, której intuicyjnie oczekujemy od modelu chaotycznego jest to, że na długą metę średnie czasowe obserwowalnych wartości modelu będą zbiegać do średnich po przestrzeni fazowej, czyli możliwych stanach układu. Powiedzmy, że dysponujemy modelem całorocznej pogody (o ile mi wiadomo, model taki obecnie nie istnieje), który z  $66^{66}$  parametrów zadanych w Nowy Rok, wylicza wartości tychże parametrów na następny Nowy Rok oraz dostarcza dokładnej rocznej prognozy na cały ten rok. Intuicyjnie oczekujemy, że jeśli model ten jest chaotyczny, tzn. pogoda z roku na rok zmienia się bez jakiejś istotnej reguły, wielkości charakteryzujące pogodę powinny się na długą metę uśredniać. Co

więcej te średnie czasowe powinny być do odczytania z samej przestrzeni fazowej modelu, ponieważ blakając się po niej chaotycznie model będzie odwiedzał każdy zbiór z częstością proporcjonalną do jego miary. Np. jeśli zbiór  $A$  oznacza minimum centymetr śniegu w Warszawie w Boże Narodzenie, to można by ustalić prawdopodobieństwo tego zdarzenia w prognozie jednorocznej według pewnego rozkładu i oczekiwać, częstości czasowe z wielu lat będą do tej wartości zbiegały.

**Definicja 5.4** *Nieosobliwe przestąpienie  $S : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$  nazwiemy ergodycznym (względem  $\mu$ ), jeśli z tego, że jakiś zbiór mierzalny  $A$  jest niezmienniczy, tj.  $S^{-1}(A) = A$  wynika, że albo on sam, albo jego dopełnienie ma miarę 0. Jeśli dodatkowo  $\gamma_0$  jest gęstością niezmienniczą, a  $d\nu = \gamma d\mu$  zadaje miarę probabilistyczną, to  $S$  jest mieszające, o ile dla każdej pary zbiorów mierzalnych  $A, B$  zachodzi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap S^{-n}(B)) = \nu(A)\nu(B) .$$

Łatwo widzimy, że z mieszania wynika ergodyczność względem  $\nu$ , bo wystarczy rozważyć jako  $A$  i  $B$  zbiór niezmienniczy oraz jego dopełnienie. W dalszej dyskusji będziemy często zakładać, że gęstość niezmiennicza jest stałą równą 1. Nie jest wbrew pozorom istotne ograniczenie, ponieważ mając inną gęstość niezmienniczą możemy zawsze rozważyć  $\nu$  jako miarę odniesienia zamiast  $\mu$ .

Z kolei równość średnich czasowych i średnich po przestrzeni fazowej względem gęstości niezmienniczej ustala twierdzenie ergodyczne Birkhoffa.

**Twierdzenie 5.2** *Przypuśćmy, że  $\gamma$  jest gęstością niezmienniczą, zaś  $S$  jest ergodyczne względem  $d\nu = \gamma d\mu$ . Wówczas dla dowolnej funkcji  $f$  całkowalnej względem  $\nu$  zachodzi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k(x)) = \int_X f \gamma d\mu .$$

Jak więc widzimy, “właściwą” gęstością względem której należy liczyć średnie po przestrzeni fazowej jest gęstość niezmiennicza. Nasuwa to pytanie o jej jedyność - i istotnie z ergodyczności łatwo wynika, że jeśli istnieje gęstość niezmiennicza, to jest ona jedyna.

### Własności ergodyczne w terminach operatora Perrona-Frobeniusa.

Na koniec zauważymy, że ergodyczność i mieszanie dają się także wyrazić w terminach samego tylko operatora Perrona-Frobeniusa.

**Twierdzenie 5.3** *Założmy, że  $\mathbf{1}$  jest gęstością niezmienniczą dla miary odniesienia  $\nu$ . Wówczas zachodzą następujące równoważności:*

- *$S$  jest ergodyczne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji  $f \in L_1(X, \nu)$  ciąg średnich Cesáro*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f$$

*zbiega do  $\mathbf{1}$  słabo w  $L_1$ ,*

- *$S$  jest mieszające wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji  $f \in L_1(X, \nu)$  ciąg  $P^n f$  zbiega słabo do  $\mathbf{1}$  w  $L_1$ .*

Przypomnijmy, że zbieżność słaba ciągu funkcyjnego  $f_n \in L_1(X, \nu)$  do  $f$  oznacza, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n g \, d\nu = \int f g \, d\nu$$

dla dowolnej funkcji testowej  $g \in L_\infty(X, \nu)$ .

Wracając do naszego przykładu z rocznym modelem pogody, jego ergodyczność oznacza, że asymptotyczna częstość opadu minimum 1cm śniegu w Boże Narodzenie zbiega do prawdopodobieństwa takiego zdarzenia prognozie jednorocznej liczonego według gęstości niezmienniczej. Jednak nie daje to jeszcze informacji na temat, z jakim prawdopodobieństwem śnieg spadnie w Boże Narodzenie roku 2099, ponieważ ergodyczność może się realizować w cyklach kwazi-okresowych (na przykład obrót niewymierny na okręgu jest kwazi-okresowy, więcej na ten temat w jednym z ćwiczeń) i w tej sytuacji odpowiedź może być zależna od rozkładu warunków początkowych. Dopiero mieszanie pozwala stwierdzić, że prawdopodobieństwo w roku  $n$  zbiega do średniej z prognozy jednorocznej według gęstości niezmienniczej i to niezależnie od warunku początkowego.

Z kolei definiujemy najsilniejszą własność dotyczącą asymptotyki ewolucji gęstości dla układów chaotycznych.

**Definicja 5.5** *Operator Markowa, który działa na przestrzeni  $L_1(X, \mu)$  nazywamy asymptotycznie stabilnym, jeśli istnieje gęstość niezmiennicza  $\gamma_0$  taka, iż dla każdej innej gęstości  $\gamma$  zachodzi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^n \gamma - \gamma_0\|_1 = 0.$$

Wtedy dynamikę  $S$ , dla której  $P$  jest operatorem Perrona-Frobeniusa, nazywamy statystycznie stabilną.

Nietrudno sprawdzić, że asymptotyczna stabilność implikuje mieszanie, a zatem i ergodyczność względem miary  $d\nu = \gamma_0 d\mu$ .

## 5.4 Ćwiczenia i laboratoria.

**Jedyność gęstości niezmienniczej.** Wykazać, że jeśli przekształcenie  $S$  jest ergodyczne względem miary  $\mu$ , to istnieje co najwyżej jedna gęstość niezmiennicza. W dowodzie należy skorzystać z markowowskich własności operatora Perrona-Frobeniusa.

**Ergodyczność bez mieszania.** Rozważmy jako  $S$  obrót na okręgu o kąt niewspółmierny z  $\pi$ , dla ustalenia uwagi o  $(\sqrt{5} - 1)\pi$  radianów. Wiadomo, że jest on ergodyczny, co sprawdzić numerycznie z twierdzenia 5.2 dla funkcji próbnych  $f(x) = \sin^k(20\pi x)$  i  $k = 1, 2, 3$ . Uzasadnić, dlaczego przekształcenie to nie może być mieszające.

**Gęstość niezmiennicza zadana explicite.** Dla przekształcenia Ulama-Von Neumanna  $f(x) = 4x(1-x)$   $x \in [0, 1]$  sprawdzić, że gęstość niezmiennicza względem miary Lebesgue'a jest zadana poprzez

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 x(1-x)}}.$$

**Numeryczne badanie statystycznej stabilności.** Zaprogramować metodę numeryczną dla liczenia ewolucji gęstości pod działaniem operatora Perrona-Frobeniusa zakładając, że daje się go policzyć z twierdzenia 5.1 oraz sprawdzania jego asymptotycznej stabilności. Zastosować do zbadania jednego z poniższych przykładów.

**Rodzina kwadratowa**  $f_a(x) = ax(1-x)$   $x \in [0, 1]$ . Zbadać statystyczną stabilność w punktach  $a = 3.6$ , gdzie wiadomo, że jej nie ma, i  $a = 4$ , gdzie wiadomo, że jest. Powtórzyć w paru punktach spomiędzy.

**Model świdra wiertniczego.** Pewien typ świdra ma zębate wiertło, które po każdym uderzeniu w skałę odbija się i potem ponownie uderza pod nieco innym kątem. Jeśli kąt ten wyraża się liczbą  $x$  braną modulo 1, to kąt kolejnego uderzenia jest

$$S(x) = x + aq(x) - \sqrt{(aq(x))^2 + 2axq(x) - aq(x)(1+q(x))} \pmod{1},$$

gdzie

$$q(x) = 1 + E\left(\frac{1-2x}{a-1}\right),$$

$E$  oznacza część całkowitą liczby, zaś  $a > 1$  jest parametrem zależnym m.in. od prędkości wiertła. Teoria sugeruje (ale nie dowodzi), że zmiana statystycznej własności zachodzi dla  $a = 2$  (co jakoby słychać, kiedy świder pracuje). Naszkicować wykres przekształcenia, policzyć operator Perrona-Frobeniusa i zbadać statystyczną stabilność dla pewnych wartości  $a > 2$  i  $a < 2$ .

## Literatura

- [1] V.S. Anishchenko et. al: *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2007)
- [2] A. Lasota, M. Mackey *Chaos, Fractals and Noise*, Springer Applied Mathematical Sciences no. 97, New York 1994
- [3] R.C. Robinson *An introduction to dynamical systems: Continuous and discrete*, Pearson Education Inc. - Prentice Hall, New Jersey (2004)