

1. Sformułowanie zadania programowania dyskretnego

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ - zbiór skończony

$F \subseteq 2^E$ - rodzina podzbiorów (rozwiązania dopuszczalne)

$f : F \rightarrow \mathbb{R}$ - funkcja ustalająca wagi elementów (rozwiązań dopuszczalnych)

Zadanie optymalizacji dyskretniej: $(P) \quad v(P) = \min_{x \in F} f(x) / (\max)$

$v(P)$ - wartość optymalna zadania P

$F(P)$, $F^*(P)$ - zbiory rozwiązań dopuszczalnych i optymalnych zadania P .

Zadanie programowania matematycznego dyskretnego (całkowitoliczbowego)

Rodzina F jest określona poprzez wprowadzenie zmiennych zadania i podanie układu ograniczeń;

liniowy problem programowania dyskretnego:

$F(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0, x \in Z^n\}$, $v(P) = \max \{cx : Ax \leq b, x \geq 0, x \in Z^n\}$.

Problemy binarne. Programowanie dyskretnie mieszane.

Założenie: współczynniki w A, b, c są liczbami całkowitymi.

2. Zastosowanie programowania dyskretnego (proste przykłady)

Zadanie załadunku - maksymalizacja łącznej wartości załadowanych ładunków; mamy n ładunków (np. skrzyń) - o ciężarach $a_1, a_2, \dots, a_n$ i wartościach $c_1, c_2, \dots, c_n$; b - dopuszczalna ładowność (np. samochodu).

zmienna decyzyjna: $x_j = \begin{cases} 1 & j\text{-ta skrzynia jest załadowana} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

funkcja celu: $v(Z) = \max \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$

ograniczenie: $\sum_{j=1}^n a_j \cdot x_j \leq b$

zmienne: $x_j = 0 \vee 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

Zadanie rozkroju - minimalizacja odpadów powstających podczas rozkroju przedmiotów (np. bel papieru); rozkrój beli na wstęgi o szerokościach $s_1, s_2, \dots, s_m$, w - szerokość beli; rozważamy n sposobów rozkroju beli; u_{ij} - liczba wstęg szerokości s_i wyciętych przy j -tym sposobie rozkroju; a_i, b_i - min. i max. zapotrzebowanie na wstęgi o szerokości s_i .

zmienna decyzyjna: x_j - krotność wykorzystania j -tego sposobu rozkroju

funkcja celu: $v(R) = \min \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j, \quad c_j = w - \sum_{i=1}^m s_i \cdot u_{ij} \geq 0 \quad (!) - \text{odpad}$

ograniczenia: $a_i \leq \sum_{j=1}^n u_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m);$

zmienne: $x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) - \text{całkowite}$

Zadanie lokalizacyjno - transportowe (zadanie lokalizacji fabryk) - minimalizacja łącznego kosztu budowy fabryk i późniejszego transportu towaru z fabryk do odbiorców;

$D_1, D_2, \dots, D_m$ - działki budowlane (na działce - co najwyżej jedna fabryka)

$O_1, O_2, \dots, O_n$ - odbiorcy towaru

c_i - koszt budowy fabryki na działce D_i

d_{ij} - jednostkowe koszty transportu z D_i do O_j

a_i - ograniczenie na wielkość produkcji na działce D_i

b_j - min. zapotrzebowanie j -tego odbiorcy

zmienne decyzyjne: $x_i = \begin{cases} 1 & \text{na działce } D_i \text{ jest wznoszona fabryka} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$

y_{ij} - ilość towaru transportowanego z D_i do O_j

funkcja celu: $v(L - T) = \min \left(\sum_{i=1}^m c_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot y_{ij} \right)$

ograniczenia: $\sum_{i=1}^m y_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad \sum_{j=1}^n y_{ij} \leq a_i \cdot x_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$

zmienne: $x_i = 0 \vee 1; \quad y_{ij} \geq 0 - \text{ciągłe} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$

3. Podstawowe równoważności problemów dyskretnych

$$\max_{x \in F(P)} f(x) = - \min_{x \in F(P)} (-f(x)); \quad g(x) \geq 0 \iff -g(x) \leq 0$$

$$g(x) \leq 0 \iff g(x) + s = 0, \text{ gdzie } s \geq 0; \quad g(x) = 0 \iff g(x) \leq 0 \wedge g(x) \geq 0;$$

$$x \in \mathbb{R} : x = x^+ - x^-; \quad x^+, x^- \geq 0$$

3.1 Sprowadzanie zadań do problemów binarnych

$$0 \leq x \leq d \quad (d - \text{dane}, x - \text{całkowite})$$

$$x = 2^0 \cdot y_1 + 2^1 \cdot y_2 + \dots + 2^{r-1} \cdot y_r; \quad y_i = 0 \vee 1 \quad (2^r - 1 \geq d)$$

$$x \rightarrow y_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) - \text{nowe zmienne binarne}$$

Wniosek: każdy ograniczony całkowitoliczbowy problem nieliniowy można sprowadzić do równoważnego mu nieliniowego problemu binarnego.

3.2 Linearyzacja problemów nieliniowych

Dla zmiennych binarnych: $x_j^n = x_j$,

$t = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ - iloczyn różnych zmiennych binarnych

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - t \leq n - 1 \quad \wedge \quad (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n \cdot t \geq 0$$

$$t = 1 \iff (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = n ; \quad t = 0 \iff (x_1 + x_2 + \dots + x_n) < n$$

Jeżeli w rozważanym problemie nieliniowym mamy m ograniczeń, k zmiennych binarnych i n różnych iloczynów tych zmiennych, to po linearyzacji otrzymamy problem liniowy, w którym będzie $m + 2n$ ograniczeń i $k + n$ zmiennych binarnych.

3.3 Agregacja ograniczeń równościowych

Każdy ograniczony całkowitoliczbowy problem z $m > 1$ ograniczeniami równościowymi można sprowadzić do równoważnego mu problemu z jednym ograniczeniem równościowym.

$$v(P) = \max \{cx : Ax = b, 0 \leq x \leq d, x \in Z^n\},$$

$$v(P_a) = \max \{cx : uAx = ub, 0 \leq x \leq d, x \in Z^n\},$$

$u \in \mathbb{R}^m$ - wektor współczynników agregacji;

Tw. Istnieje wektor $u \in Z^m$ taki, że $F(P) = F(P_a)$.

Uwaga. Współczynniki agregacji zależą wykładniczo od m .

4. Sformułowanie modeli za pomocą zmiennych binarnych

4.1 Optymalizacja na zbiorach skończonych

$x \in D = \{k_1, \dots, k_n\}$ np. D określa możliwe poziomy produkcji projektowanego obiektu.

$$x = \sum_{i=1}^n k_i \cdot y_i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n y_i = 1 \quad - \text{wprowadzamy zm. binarne } y_1, y_2, \dots, y_n.$$

4.2 Zadania ze stałą dopłatą (kosztem progowym)

$$(P) \quad \min \sum_{j=1}^n f_j(x_j), \quad f_j(0) = 0, \quad f_j(x_j) = d_j + c_j \cdot x_j \quad \text{gdy } x_j > 0$$

$$\text{z ogr. } \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(P^*) \quad \min \sum_{j=1}^n (c_j \cdot x_j + d_j \cdot y_j)$$

$$\text{z ogr. } \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad x_j - u_j \cdot y_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$x_j \geq 0, \quad y_j = 0 \vee 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (x_j \leq u_j - \text{dane})$$

4.3 Dychotomie

np. $\max_{x \in S} f(x)$, gdzie S określa warunek: $g(x) \geq 0 \vee h(x) \geq 0$

$$g(x) \geq y \cdot \underline{g} \wedge h(x) \geq (1 - y) \cdot \underline{h}$$

$\underline{g}, \underline{h}$ - skończone kresy dolne funkcji g, h ; $y = 0 \vee 1$

uogólnienie: alternatywy k-krotne - musi być spełnionych co najmniej k ograniczeń postaci
 $g_i(x) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$

$$g_i(x) \geq y_i \cdot \underline{g}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad \sum_{i=1}^m y_i \leq m - k; \quad y_i = 0 \vee 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

4.4 Ograniczenia warunkowe $(p \implies q) \iff [(\sim p) \vee q]$

np. $f(x) > 0 \implies g(x) \geq 0$ odpowiada dychotomia $f(x) \leq 0 \vee g(x) \geq 0$

$$g(x) \geq y \cdot \underline{g} \wedge f(x) \leq (1 - y) \cdot \bar{f}$$

$\underline{g}$ - kres dolny g , $\bar{f}$ - kres górny f ; $y = 0 \vee 1$

4.5 Ograniczenia dysjunkcyjne zm. $x \geq 0$: $x = 0 \vee p \leq x \leq M \quad (p > 0)$

$$x + py \geq p \wedge x + My \leq M, \quad y = 0 \vee 1$$

4.6 Aproksymacja odcinkowoliniowa $f_i = f(y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n;$

$$g(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f_i; \quad y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot y_i; \quad g - \text{odc.apr.}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \text{ zm.ciągłe}$$

$$\lambda_1 \leq J_1, \quad \lambda_i \leq J_{i-1} + J_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-1), \quad \lambda_n \leq J_{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} J_i = 1; \quad J_i = 0 \vee 1$$