

5. Podstawowe relaksacje problemów dyskretnych (osłabienia)

$$(P_1) \quad v(P_1) = \max_{x \in F(P_1)} f(x); \quad (P_2) \quad v(P_2) = \max_{x \in F(P_2)} g(x);$$

DEF. Dla problemu P_1 , problem P_2 jest jego *relaksacją*, jeżeli

- 1) $F(P_1) \subseteq F(P_2)$, 2) $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in F(P_1)$ [dla min: $g(x) \leq f(x)$]

Najczęściej stosowane relaksacje problemów dyskretnych

- 1) odrzucanie warunków całkowitoliczbowości

$$v(P) = \max \{cx : Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\}, \quad v(\bar{P}) = \max \{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

$$v(P) \leq [\bar{c}\bar{x}], \quad \bar{x} - \text{rozwiązanie optymalne problemu } \bar{P}$$

- 2) zmniejszanie liczby ograniczeń

- 3) relaksacja Lagrange'a $v(P) = \max \{cx : Ax \leq b, 0 \leq x \leq d, x \in \mathbb{Z}^n\}$

$$\text{np. } v(L_u) = \max \{cx + u(b - Ax) : 0 \leq x \leq d, x \in \mathbb{Z}^n\}$$

dodanie do funkcji celu wszystkich lub tylko części ograniczeń (z wagami); $u \geq 0$ - ustalony wektor

6. Zagadnienie komiwojażera

6.1 Zagadnienie klasyczne

problem wyznaczania optymalnej kolejności odwiedzania n miast (punktów)

dane: c_{ij} - odległość z punktu i do punktu j ($i, j = 1, 2, \dots, n$);

przyjmujemy - $c_{ii} = +\infty$; $c_{ij} = +\infty$ gdy brak bezpośredniego połączenia;

$c_{ik} \leq c_{ij} + c_{jk}$ (warunek trójkąta) - istnieje najkrótsza droga przechodząca przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz

różne sformułowania zagadnienia komiwojażera

a) teoria grafów

b) programowanie dyskretne

$$(K) \quad v(K) = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in N-S} x_{ij} \geq 1 \quad \text{dla każdego } S \subset N = \{1, 2, \dots, n\}, \quad S \neq \emptyset, S \neq N$$

$x_{ij} = 1$ - komiwojażer przejeżdża (bezpośrednio) z punktu i do punktu j ; $x_{ij} = 0$ wpp

związek z zagadnieniem przydziału pracy

6.2 Zagadnienie wielu komiwojażerów

zagadnienie z jedną bazą - k komiwojażerów, startując z bazy ma obsłużyć n klientów i powrócić do bazy; każdy klient jest obsługiwany przez jednego komiwojażera;

- minimalizujemy łączną drogę (wprowadzić k fikcyjnych miast, które pokrywają się z bazą)

7. Unimodularność. Przepływy w sieciach.

7.1 Unimodularność

Założenie: A, b - całkowitoliczbowe; $(PL) \quad v(PL) = \max \{cx : Ax = b, x \geq 0\}$
 $Ax = Bx_B + Rx_R = b$, gdzie $\det B \neq 0$; rozwiązanie bazowe: $x_B = B^{-1} \cdot b, x_R = 0$

Własność rozwiązania: B^{-1} - macierz całkowitoliczbowa $\implies$ rozw. baz. jest całkowitoliczbowe

DEF. Macierz kwadratową B nazywamy *unimodularną*, jeżeli $|\det B| = 1$.

DEF. Macierz nazywamy *całkowicie unimodularną*, jeżeli każda jej podmacierz kwadratowa nieosobliwa jest unimodularna.

Tw.1 A - całkowicie unimodularna $\implies$ każde rozwiązanie bazowe problemu PL jest całkowitoliczbowe.

Tw.2 Macierz A , której elementy a_{ij} są równe 0, 1 lub -1 dla wszystkich i oraz j , jest całkowicie unimodularna, jeżeli

1. Każda kolumna zawiera nie więcej niż dwa elementy niezerowe.
2. Wiersze można rozbić na dwa podzbiory Q_1 i Q_2 takie, że
 - (a) jeżeli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o takich samych znakach, to wiersze odpowiadające tym elementom należą do różnych podzbiorów;
 - (b) jeżeli kolumna zawiera dwa elementy niezerowe o różnych znakach, to odpowiadające im wiersze należą do tego samego podzbioru.

7.2 Zadania przepływu z pojemnościami

$G = (V, E)$ - graf skierowany, $V = \{1, \dots, m\}$

$V = V^1 \cup V^2 \cup V^3$; V^1, V^2, V^3 - punkty początkowe, pośrednie, odbioru;

$V_i = \{j : (i, j) \in E\}$, $V_i^* = \{j : (j, i) \in E\}$ dla $i \in V$

$$(P) \quad v(P) = \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

przy warunkach

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad \text{dla } (i, j) \in E, \quad \sum_{j \in V_i} x_{ij} - \sum_{j \in V_i^*} x_{ji} \begin{cases} \leq a_i & i \in V^1 \\ = 0 & i \in V^2 \\ \leq -b_i & i \in V^3 \end{cases}.$$

Tw. 3 W problemie P macierz odpowiadająca ograniczeniom jest całkowicie unimodularna.

Szczególne przypadki: zadanie

- 1) przewozu: $d_{ij} = +\infty$,
- 2) transportowe: $V^2 = \emptyset$, $V_i^* = \emptyset$ dla $i \in V^1$, $V_i = \emptyset$ dla $i \in V^3$,
- 3) najkrótszej drogi: $V^1 = \{1\}$, $V^3 = \{m\}$, $a_1 = 1$, $b_m = 1$, $d_{ij} = 1$ ($c_{ij} \geq 0$),
- 4) maksymalnego przepływu: $V^1 = \{1\}$, $V^3 = \{m\}$, $V_1^* = \emptyset$, $V_m = \emptyset$,
 $a_1 = +\infty$, $b_m = 0$, $c_{im} = -1$ dla $i \in V_m^*$ oraz $c_{ij} = 1$ dla pozostałych i, j ;