

8. Istota ogólnych metod programowania dyskretnego

8.1 Metody odcięć

- (P_w) $v(P_w) = \max \{cx : A_w x \leq b, x \geq 0, x \in Z^s\}; \sum_{j=1}^s a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$
- (P) $v(P) = \max \{cx : Ax = b, x \geq 0, x \in Z^n\}$ ($n = m + s$) po dodaniu zm. dodatk.
- $(\bar{P})$ $v(\bar{P}) = \max \{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ - relaksacja liniowa (P) ; niech $\bar{x} \in F^*(\bar{P})$
 - $\bar{x} \in Z^n \rightarrow \bar{x} \in F^*(P)$
 - $\bar{x} \notin Z^n \rightarrow$ konstruujemy odcięcie (pł. odcinającą), które odcina $\bar{x}$ od $F(\bar{P})$ nie naruszając $F(P)$; ograniczenie to dołączamy do ograniczeń problemu $\bar{P}$; rozwiązujemy nowy problem

Analityczna postać odcięcia $\bar{x} \in F^*(\bar{P})$ wyznaczamy przy pomocy alg. sympleks
 $A = (B, N)$, B - macierz bazowa, $x = (x_B, x_N)$, $c = (c_B, c_N)$, $Ax = Bx_B + Nx_N$
 $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$, $x_0 = cx = c_Bx_B + c_Nx_N = c_BB^{-1}b - (c_BB^{-1}N - c_N)x_N$

$$(1) \quad x_{B_i} = y_{i,0} - \sum_{j \in R} y_{i,j} \cdot x_j \quad (i = 0, 1, \dots, m, R - \text{zm. niebazowe}) \quad \textbf{Tablica sympleksowa}$$

$$p \cdot x_{B_i} + p \cdot \sum_{j \in R} y_{i,j} \cdot x_j = p \cdot y_{i,0} \quad (p \neq 0, p - \text{parametr odcięcia})$$

$$x \geq 0 \rightarrow [p] \cdot x_{B_i} + \sum_{j \in R} [p \cdot y_{i,j}] \cdot x_j \leq p \cdot y_{i,0}$$

$$x \in Z^n \rightarrow [p] \cdot x_{B_i} + \sum_{j \in R} [p \cdot y_{i,j}] \cdot x_j \leq [p \cdot y_{i,0}]$$

$$(2) \quad \sum_{j \in R} ([p] \cdot y_{i,j} - [p \cdot y_{i,j}]) \cdot x_j \geq [p] \cdot y_{i,0} - [p \cdot y_{i,0}] - \textbf{ogólny wzór na odcięcie}$$

$$\bar{x} \notin Z^n \wedge [p] \cdot y_{i,0} - [p \cdot y_{i,0}] > 0 \rightarrow (2) \text{ odcina } \bar{x} \text{ od } F(\bar{P})$$

Metoda form całkowitych p - całk. niech $p = 1$, ozn. $y_{i,j} = [y_{i,j}] + f_{i,j}$, $f_{i,j} \geq 0$

$$(3) \quad \sum_{j \in R} f_{i,j} \cdot x_j \geq f_{i,0}; \quad \bar{x} \notin Z^n \rightarrow (\exists i) f_{i,0} > 0 \quad (\text{warunek odcięcia } \bar{x} \text{ od } F(\bar{P}))$$

$$(4) \quad s = -f_{i,0} - \sum_{j \in R} f_{i,j} \cdot (-x_j) \quad \text{postać (3) po dodaniu zmiennej dodatkowej } s \geq 0$$

Krok 1 (start). Rozwiąż $\bar{P}$; niech $\bar{x} \in F^*(\bar{P})$

Krok 2 (test stopu). $\bar{x}$ - całkowitoliczbowy $\rightarrow$ stop ($\bar{x} \in F^*(P)$)

Krok 3 (generacja odcięcia i reoptymalizacja). Wybierz wiersz w tablicy sympleksowej; dopisz odcięcie (4), oparte na tym wierszu, na dole tablicy sympleksowej; zastosuj dualny algorytm sympleks; idź do kroku 2;

Wybór odcięcia

Dobierając wartość p w (2), otrzymujemy różne odcięcia i w konsekwencji algorytmy odcięć o różnej efektywności. Efektywność tych algorytmów zależy od tego, jak dużą część zbioru $F(\bar{P}) - F(P)$ dane odcięcie odcina od $F(\bar{P})$.

Odcięcie $(*) \sum_{j \in R} d_j x_j \geq d_0$ jest silniejsze od odcięcia $(o) \sum_{j \in R} q_j x_j \geq q_0$, gdy $d_j \leq q_j$ dla wszystkich $j \in R$ oraz $d_0 \geq q_0$, przy czym przynajmniej jedna nierówność jest ostra.

Jeżeli punkt $\tilde{x}$ zostanie odcięty przez odcięcie (o) , to będzie odcięty także przez odcięcie $(*)$

$$\sum_{j \in R} d_j \tilde{x}_j \leq \sum_{j \in R} q_j \tilde{x}_j < q_0 \leq d_0.$$

8.2 Metody podziału i oszacowań

8.2.1 Istota metody podziału i oszacowań

- drzewo przeglądu
- $(P) : v(P) = \max\{z(x) : x \in F(P)\}$; $x^* \in F(P)$ - aktualnie najlepsze rozw. dop. (sukcesor); $z^* = z(x^*)$ - wartość odcinająca (jeżeli nie znamy x^* , to $z^* = -\infty$);

Istota metody polega na

I) rozbić zbiór rozwiązań dopuszczalnych $F(P)$ na skończoną liczbę podzbiorów (powiedzmy r); rozważamy problemy $(P_i) : v(P_i) = \max\{z(x) : x \in F(P_i)\}$; $F(P) = F(P_1) \cup \dots \cup F(P_r)$; $F(P_i) \cap F(P_j) = \emptyset$ dla $i \neq j$; wtedy $v(P) = \max_{1 \leq i \leq r} v(P_i)$;

II) szacowaniu z góry wartości $v(P_i)$ ($i = 1, \dots, r$) poprzez rozwiązanie problemów $\bar{P}_i$, które są relaksacjami (osłabieniami) P_i ; $\bar{z}_i^* = z(\bar{x}^i) = v(\bar{P}_i)$, $\bar{x}^i \in F^*(\bar{P}_i)$ [$v(P_i) \leq \bar{z}_i^*$] !!

III) analizie podproblemów P_i w oparciu o wartości $\bar{z}_i^*$ oraz z^* - należy odpowiedzieć na pytanie: czy dalsze rozpatrywanie P_i jest *perspektywiczne* ?

1) $\bar{z}_i^* \leq z^*$ (I kryterium zamykania podzbiorów - *nie jest*)

2) $\bar{z}_i^* > z^*$

a) $\bar{x}^i \in F(P)$ (II kryterium zamykania podzbiorów - *nie jest*) $x^* := \bar{x}^i$ (nowy sukcesor); $z^* := \bar{z}_i^*$ (nowa wartość odcinająca)

b) $\bar{x}^i \notin F(P)$ rozpatrywanie P_i jest *perspektywiczne* (może dać lepsze rozw. niż x^*); P_i traktujemy analogicznie jak P , dzieląc go na dalsze podproblemy

8.2.2 Metoda podziału i oszacowań dla PLC (podstawowy algorytm)

$(P) : v(P) = \max\{cx : Ax = b, x \geq 0, x \in Z^n\};$
 $(\overline{P}) : v(\overline{P}) = \max\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ - relaksacja liniowa P ; $\overline{P}_i$ - relaksacje liniowe P_i ;
 niech $\overline{x} \in F^*(\overline{P})$ i $\overline{x} \notin F(P)$; $\overline{x}_r$ - niecałkowitoliczbowa składowa rozwiązania $\overline{x}$; P
 dzielimy na 2 podproblemy poprzez dodanie ograniczeń: $x_r \leq [\overline{x}_r]$ oraz $x_r \geq [\overline{x}_r] + 1$; $v(\overline{P})$
 jest stosunkowo słabym (niedokładnym) oszacowaniem $v(P)$;

8.2.3 Przegląd pośredni (metoda dla zagadnień binarnych)

- $(P) : v(P) = \max\{cx : Ax \leq b, x - \text{binarny}\}$; przyjmujemy $c \leq 0$ [$c_j > 0 \rightarrow x_j := 1 - x_j$]; podział na podproblemy polega na wyborze pewnej zmiennej x_j , która nie była jeszcze rozpatrywana i dodaniu ograniczeń: $x_j = 0$ oraz $x_j = 1$;
- W - zbiór indeksów zmiennych ustalonych; $F = \{j : j \notin W\}$; $S^+ = \{j \in W : x_j = 1\}$,
 $S^- = \{j \in W : x_j = 0\}$; $s_i = b_i - \sum_{j \in S^+} a_{ij}$, $Q = \{i : s_i < 0\}$

Rozważamy zagadnienie P_F :

$$z = cx = \sum_{j \in F} c_j x_j + z^0 \rightarrow \max, \quad z^0 = \sum_{j \in S^+} c_j$$

przy ograniczeniach: $\sum_{j \in F} a_{ij} x_j \leq s_i \quad (i = 1, \dots, m); \quad x_j = 0 \vee 1 \quad \text{dla } j \in F;$

- istnieje i : $t_i = \sum_{j \in F} \min\{0, a_{ij}\} > s_i \rightarrow F(P_F) = \emptyset$ (warunek wystarczający)
- przyjmujemy: $\overline{z} = z^0$; rozwiązanie osłabione $\overline{x} : \overline{x}_j = 0 \quad \text{dla } j \in F$
- 1) $Q = \emptyset \rightarrow \overline{x} \in F^*(P_F)$,
- 2) $Q \neq \emptyset \rightarrow \overline{x} \notin F(P_F)$, w każdym rozwiązaniu $F(P_F)$ przynajmniej jedna ze zmiennych, których indeksy należą do $U = \{j \in F : (\exists i) s_i < 0 \wedge a_{ij} < 0\} \neq \emptyset$, musi mieć wartość jeden

- $I = \sum_{i=1}^m \max\{0, -s_i\} = - \sum_{i \in Q} s_i - \underline{\text{miara niespełnienia ograniczeń zadania } P_F}$;

$I_j = \sum_{i=1}^m \max\{0, -s_i + a_{ij}\}$ - miara niespełnienia ograniczeń zadania P_F , gdy dodatkowo $x_j = 1$;

- do podziału wybieramy zmienną x_p ($p \in U$) taką, że $I_p = \min_{j \in U} I_j$ oraz dodatkowy warunek $x_p = 1$.

- podstawowy algorytm

krok 1 (początkowy). W wierzchołku $v_0 : F = \{1, \dots, n\}$, $z^* = -\infty$; przejdź do kroku 2;

krok 2 (obliczanie oszacowań). W wierzchołku $v_k : z^0 = \sum_{j \in S^+} c_j$; $Q = \emptyset \rightarrow z^* = \max\{z^*, z^0\}$ (wartość odcinająca); przejdź do kroku 3;

krok 3 (zamykanie). Istnieje $i : t_i > s_i \vee z^0 \leq z^* \rightarrow$ zamknij v_k i przejdź do kroku 4; w przeciwnym przypadku $\rightarrow$ przejdź do kroku 5 (wierzchołek v_k pozostaje aktywny);

krok 4 (cofanie się). Nie ma wierzchołków aktywnych $\rightarrow$ przejdź do kroku 6; w przeciwnym przypadku $\rightarrow$ wybierz gałąź prowadzącą do ostatnio otrzymanego wierzchołka aktywnego i przejdź do kroku 2;

krok 5 (podział i gałęzienie). Wybierz zmienną x_p zgodnie z regułą $I_p = \min_{j \in U} I_j$; dokonaj rozbitcia dodając ograniczenia: $x_p = 1$ i $x_p = 0$; wybierz gałąź $x_p = 1$; przejdź do kroku 2;

krok 6 (końcowy). $z^* = -\infty \rightarrow F(P) = \emptyset$; $z^* > -\infty \rightarrow$ rozwiązanie dopuszczalne, które daje wartość z^* , jest rozwiązaniem optymalnym;

- testy dodatkowe; z^* - wartość odcinająca; do ograniczeń zadania P_F dodajemy dodatkowe $\sum_{j \in F} c_j x_j + z^0 \geq z^*$; rozważamy zagadnienie $P_{F'}$

$$z = cx = \sum_{j \in F} c_j x_j + z^0 \rightarrow \max$$

przy ograniczeniach: $\sum_{j \in F} a_{ij} x_j \leq s_i$ ($i = 0, 1, \dots, m$); $a_{0j} = -c_j \geq 0$ dla $j \in F$, $s_0 = z^0 - z^*$;

przyjmujemy: $s_0 > 0$ [$s_0 < 0 \rightarrow F(P_{F'}) = \emptyset$]

TEST I. Niech $p \in F$; niech dla i -tego ograniczenia ($0 \leq i \leq m$): $\sum_{j \in F} \min\{0, a_{ij}\} + |a_{ip}| > s_i$; wtedy $a_{ip} > 0 \rightarrow x_p = 0$, $a_{ip} < 0 \rightarrow x_p = 1$;

TEST II. Niech $p \in F$; dla i -tego ograniczenia ($1 \leq i \leq m$) takiego, że $a_{ip} > s_i$ obliczamy $r_i = \min\{a_{0j} : j \in F - \{p\} \wedge a_{ij} < 0\}$; wtedy $a_{0p} + r_i > s_0 \rightarrow x_p = 0$;

TEST III. Dla $i \in Q$ ($1 \leq i \leq m$) obliczamy $h_i = \min_{j(a_{ij} < 0)} \frac{s_i \cdot a_{0j}}{a_{ij}}$; wtedy $h_i > s_0 \rightarrow F(P_{F'}) = \emptyset$;

TEST IV. P_F^u - relaksacja P_F ; ograniczenia P_F zastępujemy jednym ograniczeniem $\sum_{i=1}^m \sum_{j \in F} u_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^m u_i s_i$, gdzie $u = (u_1, \dots, u_m) \geq 0$; wtedy $F(P_F^u) = \emptyset \rightarrow F(P_F) = \emptyset$;