

PDczęść4

8. Zagadnienia załadunku

8.1 Klasyczne zagadnienia załadunku (ozn. $N = \{1, 2, \dots, n\}$)

• Binarny problem

$$(Z) \quad v(Z) = \max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b; x_j \text{ binarne } (j \in N) \right\}$$

zakładamy, że wszystkie dane są całkowitoliczbowe; przyjmujemy (bez straty ogólności): $c_j > 0$, $0 < a_j \leq b$ ($j \in N$), $\sum_{j=1}^n a_j > b$.

algorytm zachłanny: $\bar{x}_j = 1$ gdy $a_j \leq b - \sum_{k=1}^{j-1} a_k \bar{x}_k$; $\bar{x}_j = 0$ w pp.

relaksacja liniowa i relaksacja Lagrange'a:

$$(\bar{Z}) \quad v(\bar{Z}) = \max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, 0 \leq x_j \leq 1 (j \in N) \right\}$$

$$(L_u) \quad v(L_u) = \max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j + u \left(b - \sum_{j=1}^n a_j x_j \right) : x_j \text{ binarne } (j \in N), u \geq 0 \right\}$$

Tw. Jeżeli uporządkujemy $\frac{c_n}{a_n} \leq \dots \leq \frac{c_2}{a_2} \leq \frac{c_1}{a_1}$, to $\bar{x} = (1, \dots, 1, x_p, 0, \dots, 0)$,

gdzie $x_p = (b - \sum_{j=1}^{p-1} a_j) / a_p$ ($0 < x_p \leq 1$ - zmienna ułamkowa), jest optymalnym rozwiązaniem $\bar{Z}$.

Wyznaczenie $\bar{x}$ wymaga $O(n)$ operacji; uwaga: uporządkowanie wielkości c_j/a_j wymaga $O(n \log n)$ porównań

• Całkowitoliczbowy problem

$$(ZC) \quad v(ZC) = \max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j : \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b; x_j \geq 0 \text{ całk. } (j \in N) \right\}$$

$$\text{ozn. } v_k(y) = \max \left\{ \sum_{j=1}^k c_j x_j : \sum_{j=1}^k a_j x_j \leq y, x_j \geq 0 \text{ całk. dla } j = 1, \dots, k \right\}$$

zależności rekurencyjne:

$$\text{I: } v_k(y) = \max_{x_k=0,1,\dots,[y/a_k]} \{c_k x_k + v_{k-1}(y - a_k x_k)\} \quad (k = 1, \dots, n; y = 0, 1, \dots, b)$$

$$\text{II: } v_k(y) = \max \{v_{k-1}(y); c_k + v_k(y - a_k), a_k \leq y\} \quad (k = 1, \dots, n; y = 0, 1, \dots, b)$$

warunki początkowe: $v_0(y) = 0$ dla $y = 0, 1, \dots, b$

Zależność I wyraża zasadę *programowania dynamicznego*: odpowiedź na pytanie, jaki jest optymalny załadunek, można udzielić w n etapach; na każdym etapie należy podejmować optymalną decyzję.

Aby rozwiązać ZC , tj. obliczyć $v_n(b)$, trzeba wykonać $O(nb)$ porównań i dodawań.

8.2 Zagadnienia załadunku z separacją

Problemy te polegają na rozmieszczeniu ładunków w dostępnych pomieszczeniach z uwzględnieniem ograniczeń wynikających z wymagań separacji, tzn. konieczności fizycznego oddzielenia ładunków.

• Klasyczny problem

Klasyczny problem załadunku separowalnego polega na określeniu optymalnego rozmieszczenia produktów w dostępnych przedziałach w ten sposób, aby w dowolnym pomieszczeniu znajdował się co najwyżej jeden rodzaj produktu. Zakładamy, że znane są : niezbędne przestrzenie do załadowania określonych produktów, pojemność poszczególnych pomieszczeń oraz koszty przechowywania produktów w tych pomieszczeniach.

m - liczba ładunków; n - liczba pomieszczeń; $M = \{1, \dots, m\}$, $N = \{1, \dots, n\}$;
 a_i - niezbędna przestrzeń do załadowania dostępnej wielkości i -tego towaru ($i \in M$); $a_i \geq 0$;
 b_j - pojemność j -tego pomieszczenia ($j \in N$); $b_j \geq 0$;
 $c_{i,j}$ - jednostkowy zysk z umieszczenia i -tego towaru w j -tym pomieszczeniu
($i \in M, j \in N$); $c_{i,j} \geq 0$;

Model klasycznego problemu Z

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} \quad (1)$$

przy ograniczeniach: dla $i \in M$ oraz $j \in N$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq a_i \quad (1a); \quad x_{i,j} \leq b_j y_{i,j} \quad (1b); \quad \sum_{i=1}^m y_{i,j} \leq 1 \quad (1c)$$

$x_{i,j} \geq 0$ - ilość i -tego ładunku umieszczonego w j -tym pomieszczeniu;

$y_{i,j}$ - zmienna binarna; $y_{i,j} = 1$ gdy $x_{i,j} > 0$, $y_{i,j} = 0$ gdy $x_{i,j} = 0$.

Problem Z(Y) - problem załadunku zredukowany do (1), (1a) oraz (1b), gdzie $Y = [y_{i,j}]_{m \times n}$ jest tablicą binarną spełniającą warunek (1c).

Problem dualny DZ(Y):

$$v(DZ(Y)) = \min \left[\sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j y_{i,j}) w_{i,j} \right]$$

przy ograniczeniach: $u_i + w_{i,j} \geq c_{i,j}$ dla $i \in M$ oraz $j \in N$;

$u_i \geq 0, w_{i,j} \geq 0$ - zmienne dualne odpowiadające ograniczeniom (1a) oraz (1b).

Problem $DZ(Y)$ jest separowalny względem $i \in M$; można zdekomponować go na podproblemy $DZ_i(Y)$:

$$\min \left[a_i u_i + \sum_{j=1}^n (b_j y_{i,j}) w_{i,j} \right]$$

przy ograniczeniach: $u_i + w_{i,j} \geq c_{i,j}$ dla $j \in N$; $u_i \geq 0, w_{i,j} \geq 0$.

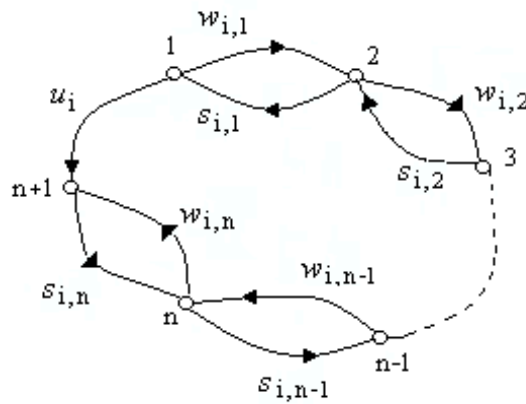
Powyższe ograniczenia zapiszemy w postaci

$$u_i + w_{i,j} - s_{i,j} = c_{i,j} \quad \text{dla } j \in N, \text{ gdzie } s_{i,j} \geq 0$$

i następnie jako układ

$$\begin{cases} u_i + w_{i,1} - s_{i,1} = c_{i,1} \\ -w_{i,j} + w_{i,j+1} + s_{i,j} - s_{i,j+1} = c_{i,j+1} - c_{i,j} \quad \text{dla } j = 1, \dots, n-1, \\ -u_i - w_{i,n} + s_{i,n} = -c_{i,n} \end{cases}$$

Ponieważ każda zmienna występuje dokładnie w dwóch równaniach z przeciwnymi znakami, układ ten reprezentuje macierz incydencji pewnej sieci skierowanej. Do rozwiązania podproblemów $DZ_i(Y)$ można zaadaptować algorytm rozwiązujący problem najtańszego przepływu w następującej sieci skierowanej.



Metoda mnożników Lagrange'a

Zdefiniujemy relaksację Lagrange'a $LZ(\lambda)$ dla problemu Z , włączając "trudne" ograniczenia (1c) do funkcji celu:

$$v(LZ(\lambda)) = \max \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(1 - \sum_{i=1}^m y_{i,j} \right) \right],$$

przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq a_i$ oraz $x_{i,j} \leq b_j y_{i,j}$ dla $i \in M, j \in N$;

zmienne: $x_{i,j} \geq 0, y_{i,j} \in \{0, 1\}$; $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0$ - mnożniki Lagrange'a.

Oczywiście $v(Z) \leq v(LZ(\lambda))$ dla wszystkich $\lambda \geq 0$.

Problem $LZ(\lambda)$ jest separowalny względem $i \in M$; można zdekomponować go na podproblemy $LZ_i(\lambda)$:

$$v(LZ_i(\lambda)) = \max \left[\sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{i,j} \right],$$

przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq a_i$ oraz $x_{i,j} \leq b_j y_{i,j}$ dla $j \in N$; $x_{i,j} \geq 0, y_{i,j} \in \{0, 1\}$.

Mamy

$$v(LZ(\lambda)) = \sum_{i=1}^m v(LZ_i(\lambda)) + \sum_{j=1}^n \lambda_j.$$

Problem $LZ_i(\lambda)$ jest równoważny następującemu nieliniowemu problemowi $ZN_i(\lambda)$:

$$v(ZN_i(\lambda)) = \max \sum_{j=1}^n d_{i,j}(x_{i,j}), \quad d_{i,j}(x_{i,j}) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } x_{i,j} = 0 \\ c_{i,j}x_{i,j} - \lambda_j & \text{jeżeli } x_{i,j} > 0 \end{cases}$$

przy ograniczeniach: $\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq a_i$ oraz $x_{i,j} \leq b_j$ dla $j \in N$; $x_{i,j} \geq 0$.

$ZN_i(\lambda)$ jest problemem załadunku (bez separacji) z kosztem progowym. Opracowano efektywny algorytm rozwiązywania tego problemu. Zatem relaksacja Lagrange'a $LZ(\lambda)$ może być użyta do określenia górnego oszacowania optymalnej wartości funkcji celu problemu Z .

- Zmodyfikowany problem

Problem ten uzyskuje się z klasycznego problemu poprzez modyfikację ograniczeń związanych z separacją ładunków. Separacja ta opisana jest za pomocą macierzy binarnej $S = [s_{i,k}]_{m \times m}$:

$s_{i,k} = 0$ - i -ty produkt może być umieszczony razem z k -tym;

$s_{i,k} = 1$ - i -ty produkt nie może być umieszczony razem z k -tym;

macierz S jest symetryczna, a elementy na głównej przekątnej są równe zero;

Model zmodyfikowanego problemu

$$\max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq a_i \quad \text{dla } i \in M; \quad \sum_{i=1}^m x_{i,j} \leq b_j \quad \text{dla } j \in N;$$

$$x_{i,j} x_{k,j} s_{i,k} = 0 \quad \text{dla } i, k \in M \ (i \neq k), \ j \in N;$$

Można zrezygnować z ograniczeń nieliniowych poprzez wprowadzenie zmiennych binarnych $y_{i,j}$ ($i \in M, j \in N$):

$$s_{i,k} (y_{i,j} + y_{k,j}) \leq 1 \quad \text{dla } i \in M; \ k = i + 1, \dots, m; \ j \in N.$$

- Metoda dekompozycji Bendersa (klasyczny problem)

Krok 0 (Start) Start z dowolnego dopuszczalnego rozwiązania problemu dualnego $DZ(Y)$, gdzie $Y = 0$ (zerowa tablica). Rozwiązanie w postaci: $u_i = 0$ oraz $w_{ij} = c_{ij}$ jest dopuszczalnym startowym rozwiązaniem.

Krok 1 (Faza programowania dyskretnego) Rozwiąż problem:

$$\max z$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{cases} z - \sum_{i=1}^m a_i u_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j w_{ij}) y_{ij} \leq 0 \\ \sum_{i=1}^m y_{ij} \leq 1 \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Zmiennymi w tym problemie są z oraz y_{ij} (zmiennne binarne), natomiast w_{ij} oraz u_i są stałe (przyjęte w kroku 0). Niech z^* oraz $Y^* = [y_{ij}^*]$ będą optymalnym rozwiązaniem ww problemu.

Krok 2 (Faza programowania liniowego) Rozwiąż problem dualny $DZ(Y)$ dla obliczonych w kroku 1 elementów $y_{ij} = y_{ij}^*$. Zmiennymi w tym problemie są u_i oraz w_{ij} . Niech u_i^* oraz w_{ij}^* będą optymalnym rozwiązaniem ww problemu.

Krok 3 (Test stopu) Jeżeli $z^* \leq v(DZ(Y^*))$, to zakończ obliczenia (przy pomocy y_{ij}^* wyznacz optymalne rozwiązanie x_{ij}). W przeciwnym przypadku przejdź do kroku 1 dodając do ograniczeń problemu dyskretnego nierówność

$$z - \sum_{i=1}^m a_i u_i^* - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_j w_{ij}^*) y_{ij} \leq 0.$$