

9. Klasyczne zagadnienie uszeregowania prac na maszynach

Rozważamy zagadnienie wyznaczania kolejności obróbki n detali na m maszynach. Założenia: (1) każda maszyna w każdej chwili może obrabiać tylko jeden detal i odwrotnie, każdy detal w każdej chwili może być obrabiany tylko na jednej maszynie, (2) każdy detal przechodzi przez wszystkie maszyny w ustalonej z góry, tej samej kolejności (dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że każdy detal przechodzi kolejno maszyny o numerach $1, 2, \dots, m$), (3) na daną maszynę może wejść dany detal, jeśli zszedł z niej poprzedni detal oraz rozpatrywany detal przeszedł wszystkie poprzedzające w ciągu kolejności maszyny, (4) dana jest nieujemna macierz $T = [t_{i,j}]_{n \times m}$, gdzie $t_{i,j}$ oznacza czas obróbki i -tego detalu na j -tej maszynie.

Zadanie polega na wyznaczeniu takich kolejności obróbki detali na poszczególnych maszynach, które minimalizują tzw. czas łączny T^* , tj. czas upływający od momentu rozpoczęcia obróbki pierwszego w kolejności detalu na pierwszej maszynie do momentu zakończenia obróbki n -tego detalu na m -tej maszynie.

Dla dwóch i trzech maszyn zadanie upraszcza się, ponieważ minimalny czas łączny można uzyskać zakładając taką samą kolejność wejścia detali na wszystkie maszyny. Uproszczone zadanie: zakłada się taką samą kolejność wejścia detali na wszystkie maszyny.

Przykład. Rozpatrzeć problem wyznaczania kolejności wchodzenia 2 detali na 4 maszyny, gdy czasy obróbki na poszczególnych maszynach są następujące: dla 1 detalu - 3, 3, 3, 3; dla 2 detalu - 3, 1, 1, 3.

Przypadek 2 maszyn

Dla ustalenia uwagi przyjmujemy kolejność detali $1, 2, \dots, n$. Oznaczenie: r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) - czas przestoju drugiej maszyny przed nadejściem i -tego detalu do drugiej maszyny. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} r_1 &= t_{1,1}, \quad r_2 = \max(t_{1,1} + t_{2,1} - t_{1,2} - r_1, 0) = \max(t_{2,1} - t_{1,2}, 0) \\ r_1 + r_2 &= \max(t_{1,1} + t_{2,1} - t_{1,2}, t_{1,1}) \\ r_3 &= \max((t_{1,1} + t_{2,1} + t_{3,1}) - (t_{1,2} + t_{2,2}) - (r_1 + r_2), 0) \\ r_1 + r_2 + r_3 &= \max((t_{1,1} + t_{2,1} + t_{3,1}) - (t_{1,2} + t_{2,2}), (t_{1,1} + t_{2,1}) - t_{1,2}, t_{1,1}) \end{aligned}$$

ogólnie

$$r = \sum_{i=1}^n r_i = \max_{1 \leq p \leq n} K_p, \text{ gdzie } K_p = \sum_{i=1}^p t_{i,1} - \sum_{i=1}^{p-1} t_{i,2}; \quad T^* = r + \sum_{i=1}^n t_{i,2};$$

Przykład. Rozpatrzeć problem wyznaczania kolejności wchodzenia 5 detali na 2 maszyny, gdy czasy obróbki poszczególnych detali są następujące: dla I maszyny - 5, 6, 10, 2, 3; dla II maszyny - 8, 10, 4, 3, 4.

Twierdzenie Johnsona Optymalną kolejność otrzymujemy z następującej reguły: detal j poprzedza detal l ($j \prec l$), jeśli

$$\max(K_j, K_l) < \max(K'_j, K'_l),$$

gdzie K_j, K_l odpowiada pewnej kolejności detali S , a K'_j, K'_l odpowiada kolejności S' otrzymanej z przestawienia detali (j, l) na (l, j) w kolejności S ; lub spełniony jest warunek równoważny:

$$\min(t_{j,1}, t_{l,2}) < \min(t_{l,1}, t_{j,2}).$$

Powyższa reguła jest przechodnia: $j \prec l \wedge l \prec p \rightarrow j \prec p$.

Algorytm Johnsona: (1) Znajdujemy najmniejszy element macierzy T . (2) Jeżeli najmniejszym elementem jest t_{i1} , to umieszczamy i -ty detal na pierwszym miejscu w kolejności. Jeżeli najmniejszym elementem jest t_{i2} , to umieszczamy i -ty detal na ostatnim miejscu w kolejności. (3) Skreślamy i -ty wiersz i dla tak otrzymanej podmacierzy powtarzamy opisane wyżej postępowanie, aż do ustalenia kolejności wszystkich detali.

Model permutacyjny (uproszczone zagadnienie klasyczne)

$w_n = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ - permutacja n detali; $z_{j_p,k}$ - moment zakończenia obróbki na k -tej maszynie p -tego detalu w permutacji w_n ; rekurencyjna zależność -
 $z_{j_p,k} = \max\{z_{j_{p-1},k}, z_{j_p,k-1}\} + t_{j_p,k}$ (gdy czas czekania detali = 0)

$$T(w_n) = z_{j_n,m} \rightarrow \min$$

Przykład. Wyznaczyć tablicę $Z = [z_{p,k}]_{4 \times 3}$ dla kolejności $(1, 2, 3, 4)$, gdy czasy obróbki poszczególnych detali są następujące: dla I maszyny: 5, 6, 30, 2; dla II maszyny - 8, 30, 4, 5; dla III maszyny - 20, 6, 5, 3.

Model całkowitoliczbowy (uproszczone zagadnienie klasyczne)

zmienne: $x_{i,j} = 1$ - i -ty detal wchodzi jako j -ty w kolejności na wszystkie maszyny, $x_{i,j} = 0$ - przeciwnym przypadku; $w_{j,k} \geq 0$ - moment rozpoczęcia obróbki j -tego w kolejności detalu na k -tej maszynie (można przyjąć $w_{1,1} = 0$);

ograniczenia:

$$(1) \sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1 \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n \quad (2) \sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(3) w_{j+1,k} \geq w_{j,k} + \sum_{i=1}^n x_{i,j} \cdot t_{i,k} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n-1; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$(4) w_{j,k+1} \geq w_{j,k} + \sum_{i=1}^n x_{i,j} \cdot t_{i,k} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$

kryterium: minimalizacja czasu łącznego $T^* = w_{n,m} + \sum_{i=1}^n x_{i,n} \cdot t_{i,m}$