

Całkowitoliczbowość danych w programowaniu dyskretnym

Założenie o całkowitoliczbowości lub, co jest równoważne, wymierności danych w zadaniu programowania dyskretnego ma głębokie uzasadnienie teoretyczne.

Dla programowania liniowego sformułowanego np. w postaci

$$(\bar{P}) \quad v(\bar{P}) = \max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

zachodzi jeden z trzech przypadków, tj. następująca trychotomia:

- a) $F(\bar{P}) = \emptyset$, tj. problem $\bar{P}$ jest sprzeczny;
- b) $v(\bar{P}) = \infty$, tj. problem $\bar{P}$ jest nieograniczony, $F^*(\bar{P}) = \emptyset$;
- c) $\bar{P}$ ma rozwiązanie optymalne $\bar{x} \in F^*(\bar{P})$, tj. $cx \leq c\bar{x}$ dla każdego $x \in F(\bar{P})$.

Poniższy przykład wykazuje, że dla problemu dyskretnego P związanego z $\bar{P}$, to jest

$$v(P) = \max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0, x \in Z^n\},$$

bez założenia całkowitoliczbowości danych taka trychotomia nie musi zachodzić.

Przykład. Rozważ zadanie programowania dyskretnego

$$v(P) = \max\{-\sqrt{2}x_1 + x_2\}$$

przy warunkach: $-\sqrt{2}x_1 + x_2 \leq 0$, $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 0$; $x_1, x_2 \in Z$.

Rozważymy teraz problem P programowania mieszanego postaci

$$v(P) = \max(cx + dy),$$

przy ograniczeniach równościowych $Ax + Dy = b$ ($x, y \geq 0$, $x \in Z^n$, $y \in \mathbb{R}^p$).

Twierdzenie. Dla problemu P spełnienie chociażby jednego z trzech niżej podanych warunków:

- 1) $p = 0$, tj. P jest problemem dyskretnym;
- 2) wszystkie elementy macierzy A i D są liczbami wymiernymi;
- 3) istnieje stała M taka, że z tego, iż $(x, y) \in F(P)$, wynika $\|x\| \leq M$

jest wystarczające na to, aby powyższa trychotomia zachodziła.

Niech $\bar{P}$ będzie problemem programowania liniowego uzyskanym z P przez odrzucenie wymagań na całkowitoliczbowość zmiennych. W programowaniu dyskretnym badanie relacji między P i $\bar{P}$ odgrywa istotną rolę. W praktycznych zastosowaniach ważna jest następująca

Uwaga. Jeśli warunek 2) twierdzenia jest spełniony oraz $F(P) \neq \emptyset$, to $v(P) = \infty \Leftrightarrow v(\bar{P}) = \infty$, oraz $F^*(P) \neq \emptyset \Leftrightarrow F^*(\bar{P}) \neq \emptyset$.

Inaczej mówiąc, jeżeli dane w zadaniu programowania dyskretnego są liczbami wymiernymi i wiemy, że zadanie to jest niesprzeczne, to po rozwiązaniu jego relaksacji liniowej wiemy, czy ma ono rozwiązanie optymalne, czy też nie.

(Źródło: S. Walukiewicz, *Programowanie dyskretnie*, PWN, Warszawa 1986)