

Złożoność obliczeniowa problemów załadunku z separacją

Dane w klasycznym problemie załadunku z separacją

$$m, n, a_i, b_j, c_{i,j} \quad (i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}) \quad (1)$$

liczba ładunków, liczba pomieszczeń, wielkość poszczególnych ładunków, pojemność poszczególnych pomieszczeń, zysk z umieszczenia jednostki ładunku w dostępnym pomieszczeniu;

Decyzyjny klasyczny problem załadunku z separacją (Dkpz)

Dla danych (1) oraz dla stałej $K > 0$, trzeba znaleźć odpowiedź na pytanie: czy istnieje przyporządkowanie ładunków do pomieszczeń (czyli, czy istnieją macierze $X = [x_{i,j}]$ i $Y = [y_{i,j}]$, gdzie $x_{i,j} \geq 0$, $y_{i,j} \in \{0, 1\}$), aby zostały spełnione ograniczenia

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq a_i, \quad x_{i,j} \leq b_j y_{i,j}, \quad \sum_{i=1}^m y_{i,j} \leq 1 \quad (i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}) \quad (2)$$

oraz

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} \geq K. \quad (3)$$

Uwaga

- ★ z punktu widzenia analizy złożoności obliczeniowej wygodniej jest rozpatrywać problemy decyzyjne niż problemy optymalizacyjne;
- ★ każdy problem optymalizacyjny można sprowadzić do równoważnego mu ciągu problemów decyzyjnych;

Jeżeli dla ustalonego K rozwiązanie problemu decyzyjnego jest "TAK", to zwiększamy K o jeden i ponownie rozwiązujemy zadanie decyzyjne. Wystąpienie po raz pierwszy w tym ciągu odpowiedzi "NIE" oznacza, że w poprzednim zadaniu uzyskano rozwiązanie optymalne. Ważne tutaj jest to, że nakład obliczeń dla rozwiązania problemu optymalizacyjnego jest co najmniej równy nakładowi obliczeń dla rozwiązania problemu decyzyjnego.

Sformułowanie problemu podziału zbioru

Dane: $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ - skończony zbiór elementów; z każdym elementem s_i związana jest waga $w_i \in \mathbb{N}^+$;

Pytanie: czy istnieje podzbiór $S' \subset S$ taki, że

$$\sum_{s_i \in S'} w_i = \sum_{s_i \in S - S'} w_i.$$

Związki z problemem podziału zbioru

Niech π będzie Dkpz o dwóch ładunkach ($m = 2$) i n pomieszczeniach, przy czym

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2} (b_1 + \dots + b_n), \quad c_{i,j} = 1 \quad \text{dla } i = 1, 2; \quad j = 1, \dots, n,$$

$$K = b_1 + \dots + b_n,$$

gdzie b_j jest pojemnością j -tego pomieszczenia.

W każdym pomieszczeniu może znajdować się co najwyżej jeden rodzaj ładunku. Dla problemu π ograniczenie (3) przyjmuje postać

$$\sum_{j=1}^n x_{1,j} + \sum_{j=1}^n x_{2,j} \geq b_1 + \dots + b_n.$$

Zatem każde pomieszczenie ma być załadowane w całości (jednym rodzajem ładunku). Takie rozmieszczenie ładunków, o ile istnieje, wyznacza podział pomieszczeń na pomieszczenia z pierwszym ładunkiem i pomieszczenia z drugim ładunkiem. Problem π w rzeczywistości jest problemem podziału zbioru.

NP-zupełność Dkpz

1. dla ustalonych macierzy X i Y , sprawdzenie warunków (2) i (3) można wykonać w czasie wielomianowym;
2. problem podziału zbioru jest NP-zupełny;

Zatem Dkpz jest NP-zupełny.