

Problem programowania dyskretnego i zagadnienie najkrótszej drogi

Wykażemy, że problem programowania dyskretnego jest równoważny zagadnieniu najkrótszej drogi w odpowiednio skonstruowanym grafie.

Rozważamy problem programowania dyskretnego (z ograniczonymi zmiennymi)

$$v(P) = \min \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j : Ax = b, 0 \leq x \leq d, x \in Z^n \right\},$$

w którym wszystkie dane są liczbami całkowitymi. Problem ten jest równoważny problemowi załadunku (z jednym ograniczeniem)

$$v(Z) = \min \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j : \sum_{j=1}^n a_j x_j = a_0, 0 \leq x \leq d, x \in Z^n \right\}$$

z danymi całkowitoliczbowymi.

Zatem wystarczy dowieść, że powyższy problem załadunku jest równoważny zagadnieniu najkrótszej drogi w odpowiednio skonstruowanym grafie. Bez straty ogólności możemy założyć, że wszystkie a_j są różne i dodatnie.

Rozważamy graf skierowany

$$G = (V, E), \quad V = \{0, 1, \dots, a_0\}, \quad E = \bigcup_{j=1}^n E_j,$$

gdzie $E_j = \{(i, k) : k - i = a_j, i = 0, 1, \dots, \min\{a_0 - a_j, d_j - 1\}, i < k \leq a_0\}$.

Przyjmujemy, że wszystkie łuki z E_j mają taką samą długość równą c_j .

Graf G jest grafem bezobwodowym, tj. nie posiada obwodu. Każda droga w tym grafie z wierzchołka 0 do wierzchołka a_0 odpowiada rozwiązaniu dopuszczalnemu problemu załadunku. Najkrótsza z tych dróg odpowiada rozwiązaniu optymalnemu, a jej długość jest równa $v(Z)$.

Zadanie.

Skonstruować graf, gdy ograniczenie w problemie załadunku ma postać : $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5$ ($n = 3$).

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E_1 = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}, \\ E_2 = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}, \quad E_3 = \{(0, 4), (1, 5)\}.$$