

IBM – ALGEBRA, ZESTAW 2

1. Rozłożyć każdy z poniższych wielomianów na iloczyn czynników nierozkładalnych, ograniczając się do $\mathbf{R}[x]$, czyli wielomianów o rzeczywistych współczynnikach:

$$x^4 + 2x^2 - 3, \quad x^4 + 6x^2 + 25, \quad x^5 - 32.$$

2. Rozwiązać równanie $w(x) = 0$ w dziedzinie zespolonej, a następnie przedstawić $w(x)$ jako iloczyn czynników liniowych w $\mathbf{C}[x]$, jeśli $w(x) =$

$$x^4 + 2x^2 - 3, \quad x^4 + 6x^2 + 25, \quad x^5 - 32, \quad x^2 - x + i + 1, \quad x^3 - 2x^2 + 4x - 8.$$

3. Wiedząc, że liczba zespolona z_1 jest pierwiastkiem wielomianu $w(z)$, znaleźć pozostałe jego pierwiastki, gdy:

- a) $z_1 = i, \quad w(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1$
 b) $z_1 = 1 - i, \quad w(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2.$

4. Znaleźć współczynniki, dla których poniższe równości stają się tożsamościami:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{2x+1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \\ \text{b)} \quad & \frac{x}{x^2+9} = \frac{A}{x-3i} + \frac{B}{x+3i} \\ \text{c)} \quad & \frac{5x^2+15x-26}{x^4-5x^2+4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2} \\ \text{d)} \quad & \frac{x^2-2x-2}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \end{aligned}$$

5. Rozwiązać równania, przedstawiając zarazem ich interpretację geometryczną:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & |z-1-3i| = |z+3+i| \\ \text{b)} \quad & |z-i| = |2z+i| \\ \text{c)} \quad & |z-3i| + |z+3i| = 6 \\ \text{d)*} \quad & |z-3i| + |z+3i| = 10 \end{aligned}$$

6*. Obliczyć długość boku trójkąta równobocznego ABC , którego wierzchołki leżą odpowiednio na prostych $x = a, x = b, x = c$.

Uwaga: Osoby, które nie były na wykładzie 17.10, mogą uznać, że to zadanie nie ma nic wspólnego z liczbami zespolonymi. Ale ma, a przynajmniej może mieć.