

1. Wykazać, że dla dowolnych liczb zespolonych w, z zachodzą równości:

$$\begin{aligned} |w + z|^2 &= |w|^2 + |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(w\bar{z}) \\ |w - z|^2 &= |w|^2 + |z|^2 - 2 \operatorname{Re}(w\bar{z}) \\ |w + z|^2 + |w - z|^2 &= 2|w|^2 + 2|z|^2 \end{aligned}$$

Dlaczego ostatnia z nich nosi nazwę tożsamości równoległoboku?

2. Wykazać, że długości boków czworokąta wypukłego $ABCD$ spełniają zależność $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne AC i BD są prostopadłe.

3. Pamiętając twierdzenie cosinusów dla trójkąta ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$) i korzystając z wyników zadania 1, podać wzór na cosinus kąta BCA w trójkącie o wierzchołkach $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(0, 0)$. Czemu z kolei równa się sinus tego kąta?

4. Pamiętając jeden z wzorów na pole trójkąta ($S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$) i korzystając z wyników zadania 3, wykazać, że pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(0, 0)$ wynosi

$$S = \frac{1}{2} |x_A y_B - x_B y_A|.$$

5. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $(0, 0), (8, 3), (13, 5)$. Objasnić na tej podstawie „zagadkę brakującego kwadratu” (opisaną m.in. na stronie pod takim tytułem w Wikipedii).

6. Niech $A_1 A_2 \dots A_n$ będzie n -kątem foremnym wpisanym w okrąg o promieniu długości 1. Obliczyć iloczyn długości $n - 1$ odcinków $A_1 A_2, A_1 A_3, \dots, A_1 A_n$.

Wskazówka: $z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$.

Odpowiedź (łatwo ją sprawdzić ręcznie dla $n = 3, 4$ lub 6): ów iloczyn wynosi n .

7. Wykazać równość $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{3}{16}$.

Wskazówka: poprzednie zadanie dla $n = 9$.

8. Z archiwum pirata Zespolonego: „Znajdź polanę z samotnym dębem, sosną i kępą wrzosu. Idź od wrzosu do dębu, licząc kroki, po czym skręć pod kątem prostym w prawo, zrób jeszcze raz tyle samo kroków i wbij tyczkę. Następnie wróć do wrzosu, skieruj się do sosny, skręć pod kątem prostym w lewo i zrób tyle kroków, ile było od wrzosu do sosny. Skarb jest teraz w połowie drogi między tobą a tyczką”. Niestety, przez lata cała polana zarosła wrzosem (choć nadal jest na niej tylko jeden stary dąb i jedna sosna). Jak znaleźć skarb?