IBM – ALGEBRA, ZESTAW 7

1. Obliczyć rząd macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & a \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & a+1 & 3 \\ 1 & 2 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście tam, gdzie występują parametry $a, b \in \mathbf{R}$, rząd może od nich zależeć.

Następne trzy zadania pochodzą z egzaminów z poprzednich semestrów.

2. Poniższy układ równań z parametrem $a \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y = a+2 \\ ax + y = 1 \\ 4x + ay = a-1 \end{cases}$$

ma

a) 0 rozwiązań dla a .....
b) ∞ rozwiązań dla a .....
c) dokładnie jedno rozwiązanie dla pozostałych a.

3. Rozważmy następujący układ równań z trzema niewiadomymi i dwoma parametrami $a, b \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} ax + y + z = b \\ x + by + z = a \\ x + 2by + z = 2. \end{cases}$$

a) Dla jakich wartości parametrów a i b powyższy układ ma co najmniej jedno rozwiązanie, a dla jakich jest sprzeczny?
b) A kiedy już ten układ ma rozwiązanie, to dla jakich a i b jest ono dokładnie jedno, a dla jakich jest ich nieskończenie wiele?

4. Rozważmy następujący układ równań z dwiema niewiadomymi i dwoma parametrami $a, b \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ x + by = a \\ ax + y = b. \end{cases}$$

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów (a, b), dla których powyższy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.