IBM – ALGEBRA, ZESTAW 8

1. Rozważmy macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$.

Obliczyć iloczyny AB, BA, AC, BC, a następnie zbadać, które z równości: $BA = AB$, $(AB)C = A(BC)$, $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ są prawdziwe.

2. Na przykładach z poprzedniego zadania sprawdzić, że nawet jeśli macierze AB i BA nie są równe, to mają ten sam wyznacznik i ślad (ślad to suma elementów na głównej przekątnej).

2*. Wykazać, że dla dowolnego n i dla dowolnych macierzy A i B rozmiaru $n \times n$ ślady macierzy AB i BA są równe.

3. Niech $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Znaleźć wszystkie macierze $A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$, dla których $AB = BA$.

b) Znaleźć wszystkie macierze $A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$, dla których $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

4. Znaleźć (być może różnymi metodami) macierze odwrotne do macierzy $\begin{bmatrix} 2018 & 2019 \\ 2016 & 2017 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Wykorzystać uzyskane wyniki w celu ponownego rozwiązania odpowiednich podpunktów zadania 1 z zestawu 6.

5. Punkt symetryczny do (a,b) względem prostej $y = x$ ma (chyba oczywiście) współrzędne (b,a). A jakie są współrzędne punktu symetrycznego do (a,b) względem prostej $y = 2x$?

Wskazówka: Co wspólnego z tym pytaniem ma macierz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i macierz do niej odwrotna?