EGZAMIN z ALL (5*12 pkt.) 3.02.2022

1. a) Przedstawić w postaci algebraicznej i trygonometrycznej wszystkie liczby zespolone spełniające równanie $z^5 = (\bar{z})^3$.

   b) Przedstawić w postaci algebraicznej i trygonometrycznej wszystkie liczby zespolone spełniające równanie $z^5 = 64(\bar{z})^3$.

2. Przedstawić graficznie na płaszczyźnie zespolonej zbiory A i B, gdzie

$$A = \{z \in \mathbf{C} :\ \operatorname{Re} \frac{z+1}{z-2} = 2\}$$

$$B = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}(z^5) > 0 > \operatorname{Im}(z^5)\}.$$

3. Uzasadnić, że w układzie dziesiętnym ostatnią cyfrą wyznacznika

$$\begin{vmatrix} -463 & 731 & 319 & -271 \\ -712 & 412 & -531 & 381 \\ -562 & 521 & 286 & 571 \\ 478 & 924 & -569 & 756 \end{vmatrix}$$

jest 5, czyli że jest on nieparzysty, ale podzielny przez 5.

4. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Dla jakich $x, y \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $(A+B) \cdot (A-B) = A \cdot A - B \cdot B$?

5. Ustalić, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ układ równań

$$\begin{cases} 4y + 6z & = & ax + 14 \\ 3z + x & = & ay - 7 \\ x + 2y & = & (a-1)z \end{cases}$$

ma 0, dla jakich 1, a dla jakich ∞ rozwiązań.

6. Niech $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ i niech $B = A \cdot A$. Wyznaczyć wielomiany charakterystyczne, oraz wartości i wektory własne macierzy A i B.