ALGEBRA

Materiały pomocnicze

dr inż. Mariusz Zając

M.Zajac@mini.pw.edu.pl

Materiały opracowane w ramach projektu „NERW PW Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca” (POWR.03.05.00-00-Z306/17) finansowanego z Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój 2014-2020.

Zadanie 15 „Interdyscyplinarne kształcenie łączące umiejętności inżynierskie oraz wiedzę medyczną na międzywydziałowym kierunku Inżynieria Biomedyczna – 1 st. – opracowanie zmian programowych, modułów kształcenia oraz jego realizacja”; 1.03.2018 – 30.01.2021

IBM – algebra. Działania na liczbach zespolonych.

Załączony plik: zespolone.m

W systemie MATLAB macierze można używać liczb zespolonych, oznaczając jednostkę urojoną symbolem `i`:

```
z1=2+3i;
z2=4-i;
```

Na liczbach zespolonych można przeprowadzać operacje arytmetyczne:

```
z3=z1*z2
z4=z1/z2
```

Proszę zwrócić uwagę, że obliczone wyniki:

```
z3 =

  11.0000 +10.0000i

z4 =

   0.2941 + 0.8235i
```

będą miały postać ułamków dziesiętnych. Użycie polecenia `sym`:

```
u1=sym(z1);
u2=sym(z2);
```

wymusi traktowanie danych jako liczb wymiernych, wskutek czego polecenia

```
u3=u1*u2
u4=u1/u2
```

dadzą wyniki

```
u3 =

11 + 10i


u4 =

5/17 + 14i/17
```

Oczywiście wcześniej uzyskane liczby `0.2941` i `0.8235` to przybliżone wartości ułamków 5/17 i 14/17, więc oba wyniki są w istocie identyczne.

IBM – algebra. Postać trygonometryczna liczb zespolonych.

Załączony plik: tryg.m

System MATLAB pozwala dokonywać działań na liczbach zespolonych w postaci trygonometrycznej. Służą do tego funkcje `abs` i `angle`, zwracające odpowiednio moduł i argument liczby zespolonej. Użyjmy ponownie następujących liczb zespolonych:

```
z1=2+3i;
z2=4-i;
```

Obliczmy moduły i argumenty tych liczb:

```
r1=abs(z1);
a1=angle(z1);
r2=abs(z2);
a2=angle(z2);
```

i zweryfikujmy uzyskane wyniki przez obliczenie

```
r1*(cos(a1)+i*sin(a1))
r2*(cos(a2)+i*sin(a2))
```

Otrzymamy wówczas:

```
ans =

   2.0000 + 3.0000i


ans =

   4.0000 - 1.0000i
```

co zgadza się z zadanymi wartościami `z1` i `z2`. Korzystając ze wzoru de Moivre'a możemy z kolei obliczyć iloczyn i iloraz liczb `z1` i `z2` w inny sposób:

```
r1*r2*(cos(a1+a2)+i*sin(a1+a2))
r1/r2*(cos(a1-a2)+i*sin(a1-a2))
```

Uzyskane wyniki:

```
ans =

  11.0000 +10.0000i


ans =

   0.2941 + 0.8235i
```

są zgodne z wcześniejszymi, nieużywającymi wzoru de Moivre'a.

IBM – algebra. Proste działania na wektorach.

Załączony plik: wektory.m

Niech n będzie liczbą naturalną. Symbolem $\mathbb{R}^n$ oznaczać będziemy standardową $n-$wymiarową przestrzeń wektorową utworzoną przez wszystkie wektory postaci

$$v = [v_1, \ldots, v_n], \text{ gdzie } v_i \in \mathbb{R}.$$

Wektor możemy pomnożyć przez skalar, czyli w naszym przypadku liczbę rzeczywistą:

$$t \cdot [v_1, \ldots, v_n] = [t \cdot v_1, \ldots, t \cdot v_n],$$

dwa wektory można też dodać:

$$[v_1, \ldots, v_n] + [w_1, \ldots, w_n] = [v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n].$$

Analogicznie wprowadzimy również odejmowanie:

$$[v_1, \ldots, v_n] - [w_1, \ldots, w_n] = [v_1 - w_1, \ldots, v_n - w_n]$$

oraz oznaczenie „$-v$” dla wektora przeciwnego do v:

$$-[v_1, \ldots, v_n] = [-v_1, \ldots, -v_n].$$

Warto podkreślić, że choć dla uproszczenia zapisu tym samym symbolem „+” oznaczamy dodawanie zarówno liczb, jak i wektorów, to są to w zasadzie różne działania. W szczególności nie ma sensu dodawanie wektora do skalara. Uwaga ta odnosi się analogicznie do odejmowania i mnożenia.

Przykład

Rozpatrzmy wektory $v = [2, 3, -1]$ i $w = [4, 2, 3]$. Aby wprowadzić je do systemu MATLAB, wystarczy wpisać

```
v=[2 3 -1];
w=[4 2 3];
```

Obliczmy teraz kolejno następujące wyrażenia:

a) `v+w`

Wynikiem jest

```
ans =

6       5       2
```

b) `3*v`

Wynikiem jest

```
ans =

6     9    -3
```

c) `2*v+3*w`

Wynikiem jest

```
ans =

16    12     7
```

Zauważmy, że MATLAB formalnie dopuszcza dodawanie skalara do wektora – wpisanie

```
v+3
```

da wynik

```
ans =

5     6     2
```

tak jakby liczba 3 została kolejno dodana do kolejnych współrzędnych wektora v. Nie jest to jednak zalecany sposób zapisu. W innych przypadkach próba dodania wektorów różniących się liczbą współrzędnych, np.

```
[1 2]+[1 2 3]
```

wygeneruje jedynie komunikat o błędzie.

IBM – algebra. Macierze, działania na macierzach.

Załączony plik: macierze.m

Niech m i n będą liczbami naturalnymi. Rzeczywistą **macierzą** $m \times n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb rzeczywistych, mającą m poziomych wierszy i n pionowych kolumn, a mówiąc bardziej formalnie funkcję

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}.$$

Liczbę $A(i, j)$, czyli tę, która znajduje się w $i-$tym wierszu od góry i $j-$tej kolumnie od lewej, oznacza się przeważnie a_{ij}.

W systemie MATLAB macierze można wprowadzać w następujący sposób:

```
A=[2 3 -1; 1 2 4; 23 5 8; -2 0 1];
```

(proszę zwrócić uwagę, że kolejne wiersze oddzielone są średnikami, podczas gdy elementy tego samego wiersza rozdzielają tylko spacje, choć dopuszczalne są również przecinki, jak poniżej).

```
B=[-2, 2, 11; 12, 1, 2; -5, 0, 4; 1, 2, 3];
```

Aby użyć elementu z przecięcia drugiego wiersza i trzeciej kolumny, piszemy

```
A(2,3)
```

Wynikiem jest

```
ans =

4
```

Można również odwołać się do całego wiersza macierzy, np. drugiego wiersza macierzy A:

```
A(2,:)

ans =

1      2      4
```

lub do całej kolumny, np. trzeciej kolumny macierzy A:

```
A(:,3)

ans =

-1
4
8
1
```

Pewne szczególne macierze można wprowadzać bez konieczności żmudnego wpisywania wszystkich wyrazów. I tak `eye(n)` to macierz jednostkowa rozmiaru $n \times n$:

```
eye(3)

ans =

1     0     0
0     1     0
0     0     1
```

`zeros(m,n)` i `ones(m,n)` to odpowiednio macierze złożone z samych zer i samych jedynek:

```
zeros(2,3)

ans =

0     0     0
0     0     0
```

```
ones(2,3)

ans =

1     1     1
1     1     1
```

a poleceniem `diag` tworzymy macierz diagonalną z zadanymi elementami na głównej przekątnej:

```
D=diag([4 3 2])

D =

4     0     0
0     3     0
0     0     2
```

Macierze można dodawać, odejmować i mnożyć przy użyciu operatorów $+$, $-$ i $*$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Obliczyć (jeśli to możliwe) macierze $A+B$, $A+D$, $B-2A$, AB, AD, DA. Wyjaśnić, dlaczego niektóre z powyższych wyrażeń dają komunikat o błędzie zamiast wyniku.

2. Zdefiniować trzy dowolne macierze 3×3 i nazwać je U, V, W. Zbadać, które z poniższych zdań są prawdziwe:

$$(U+V)+W = U+(V+W)$$

$$(UV)W = U(VW)$$

$$UV = VU$$

$$U(V+W) = UV+UW$$

$$(U+W)^2 = U^2+2UW+W^2.$$

IBM – algebra. Wyznaczniki i macierze odwrotne.

Załączony plik: operacje.m

W systemie MATLAB można obliczać wyznaczniki macierzy kwadratowych:

```
A=[2 3 -1; 1 2 4; -2 0 1];
det(A)
```

oraz macierze do nich odwrotne:

```
inv(A)
```

Spróbujmy teraz zastosować do macierzy `A` operacje elementarne i zobaczyć, jaki jest ich wpływ na wartość wyznacznika:

```
B=[A(2,:);A(1,:);A(3,:)]
det(B)
```

Widzimy, że zamiana pierwszego i drugiego wiersza macierzy zmieniła znak jej wyznacznika z -27 na 27.

Zastosujmy teraz inną operację elementarną:

```
C=[A(1,:);2*A(2,:);A(3,:)]
det(C)
```

Pomnożenie drugiego wiersza macierzy przez 2 spowodowała również pomnożenie wyznacznika przez tę samą stałą, a mianowicie z -27 otrzymaliśmy -54.

W trzecim przykładzie dodamy do siebie dwa wiersze wyjściowej macierzy:

```
D=[A(1,:);A(2,:)+A(3,:);A(3,:)]
det(D)
```

Tym razem dodaliśmy trzeci wiersz macierzy do drugiego, a wyznacznik zgodnie z oczekiwaniami nie zmienił się.

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Zbadać, jaki jest wpływ operacji elementarnych na macierz odwrotną.

IBM – algebra. Wartości i wektory własne.

Załączony plik: wart_wlasne.m

Niech A będzie macierzą kwadratową. Jeśli dla pewnego wektora $v \neq 0$ i pewnego skalara t zachodzi równość

$$A \cdot v = tv,$$

to t nazywamy **wartością własną,** a v nazywamy odpowiadającym tej wartości **wektorem własnym.** W powyższym zapisie kropka oznacza mnożenie macierzy, a w szczególności mnożenie macierzy przez wektor. Mnożenie skalara przez wektor po prawej stronie równości nie jest natomiast oznaczone żadnym symbolem.
Zauważmy, że tę samą równość można zapisać jako

$$A \cdot v = tI \cdot v,$$

czyli równoważnie

$$(A - tI) \cdot v = 0.$$

Koniecznym i wystarczającym warunkiem istnienia wektora własnego z daną watością własną t jest osobliwość macierzy $A - tI$, czyli warunek

$$\det(A - tI) = 0.$$

Nietrudno zauważyć, że wyrażenie $\det(A - tI)$ jako funkcja zmiennej t jest wielomianem stopnia n, zwanym **wielomianem charakterystycznym** macierzy A.

Przykład

Rozpatrzmy macierz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

(wprowadzamy ją do systemu MATLAB jako `A = [7,-3,6; 4,2,4; -1,2,0];`).

Obliczmy najpierw jej wielomian charakterystyczny:

```
syms t;
I = eye(3)
B = A - t .* I;
det(B)
```

Otrzymamy wynik:

```
ans =

- t^3 + 9*t^2 - 24*t + 16
```

Oznacza to, że

$$A = \begin{vmatrix} 7-t & -3 & 6 \\ 4 & 2-t & 4 \\ -1 & 2 & -t \end{vmatrix} = -t^3 + 9t^2 - 24t + 16,$$

co można również sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.
Wartości własne macierzy A uzyskamy, szukając pierwiastków wielomianu charakterystycznego:

```
solve(det(B)==0)
```

Odpowiedzią jest

```
ans =

1
4
4
```

co oznacza, że wartościami własnymi macierzy A są 1 i 4, przy czym ta druga liczba jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego.

Wektory własne znajdujemy, rozwiązując równania macierzowe

$$(A - I) \cdot v = 0$$

$$(A - 4I) \cdot v = 0.$$

Niestety

```
linsolve(A-I,[0;0;0])
```

daje wynik

```
ans =

0
0
0
```

co nie jest pełnym zbiorem rozwiązań. Poprawny wynik otrzymamy, stosując polecenia

```
null(A-I)
null(A-4I)
```

Uzyskany wynik:

```
ans =

0.7071
-0.0000
-0.7071


ans =

0
0.8944
0.4472
```

przedstawia wektory własne odpowiadające wartościom własnym 1 (pierwszy wektor) i 4 (drugi wektor).

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Wyznaczyć wielomiany charakterystyczne macierzy:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedzi: $t^2 - 25$, $t^2 + 1$, $(1-t)(t^2 - 3t + 2)$, $-t^3 + 3t^2 - 4$, $-t^3 + 12t + 16$.

2. Wyznaczyć wartości i wektory własne powyższych macierzy.

Odpowiedzi: Kolejno:
wartość $t = 5$ z wektorami $[a, 2a]$ i wartość $t = -5$ z wektorami $[-2a, a]$;
wartość $t = i$ z wektorami $[a, a \cdot i]$ i wartość $t = -i$ z wektorami $[a, -a \cdot i]$;
wartość $t = 1$ z wektorami $[-2a, b, a]$ i wartość $t = 2$ z wektorami $[3a, 2a, -a]$;
wartość $t = -1$ z wektorami $[a, 0, -a]$ i wartość $t = 2$ z wektorami $[0, 2a, a]$;
wartość $t = -2$ z wektorami $[a, a + b, b]$ i wartość $t = 4$ z wektorami $[a, a, 2a]$.