

1. Przedstawić w postaci algebraicznej i trygonometrycznej wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie $z^9 = 6z^6 + 15z^3 + 8$.
2. Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej zbiory A i B , gdzie

$$A = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \frac{1}{z+1} = 1\}$$

$$B = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}(z^5) + \operatorname{Im}(z^5) = 0\}.$$

3. Ile różnych nierzeczywistych liczb zespolonych spełnia równanie

$$z^{4000} + z^{2000} = z^{3000} + z^{1000}?$$

Odpowiedź proszę starannie uzasadnić.

4. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć zbiór wszystkich macierzy X spełniających jednocześnie równości $A \cdot X = X \cdot A$ oraz $A^2 \cdot X = X \cdot A^2$.
5. Zbadać rozwiązalność poniższego układu w zależności od parametru $a \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} 3x + y - az = 2 \\ x + y + 4z = 1 \\ 4x + ay + 2z = -3 \end{cases}$$

W szczególności należy ustalić, dla jakich a układ ma

- a) 0 rozwiązań;
- b) dokładnie jedno rozwiązanie;
- c) nieskończenie wiele rozwiązań.

6. Wyznaczyć wielomian charakterystyczny macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

oraz wszystkie jej rzeczywiste wartości i wektory własne. Jakie są wartości i wektory własne macierzy

$$B = \begin{bmatrix} 11111 & 44444 \\ 44444 & 77777 \end{bmatrix}?$$