

1. Pokazać, że dla dowolnych liczb zespolonych u i z wartość wyrażenia $u \cdot \bar{z} + \bar{u} \cdot z$ jest liczbą rzeczywistą. Przedstawić graficznie na płaszczyźnie zespolonej zbiory

$$A = \{z \in \mathbf{C} : (3 + i) \cdot \bar{z} + (3 - i) \cdot z = 10\},$$

$$B = \{z \in \mathbf{C} : (2 + i) \cdot \bar{z} + (3 - i) \cdot z = 10\}.$$

2. a) Przedstawić w postaci trygonometrycznej wszystkie liczby zespolone spełniające równanie $(z + 1)^6 = (z - 1)^6$.

b) Wykazać, że zbiór $\{z \in \mathbf{C} : |2z - 1| = |z - i|\}$ jest okręgiem na płaszczyźnie zespolonej, i narysować go.

3. Ile różnych nierzeczywistych liczb zespolonych spełnia równanie

$$z^{4044} + z^{2022} = z^{3033} + z^{1011}?$$

Odpowiedź proszę starannie uzasadnić.

4. Znaleźć wszystkie macierze X , dla których

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix},$$

oraz wszystkie macierze Y , dla których

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + Y \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

5. Ustalić i uzasadnić, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ układ równań

$$\begin{cases} 3x + ay - 2z = 5 \\ ax + 3y - 3z = 5 \\ 5x - y + z = 2a \end{cases}$$

ma 0, dla jakich 1, a dla jakich ∞ rozwiązań. Wyznaczyć zbiór rozwiązań w przypadku, gdy jest on nieskończony.

6. Wyznaczyć wszystkie zespolone wartości i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ -4 & -11 \end{bmatrix}$$

oraz uzasadnić, że suma wartości własnych macierzy A^4 wynosi 2482.