

1. Wyznaczyć i przedstawić w postaci algebraicznej i trygonometrycznej wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie $z^8 = 4 - 3z^4$.

- dla $t = z^4$ mamy $t^2 + 3t - 4 = 0$, zatem $z^4 \in \{1, -4\}$, co daje $z \in \{\pm 1, \pm i, \pm 1 \pm i\}$ (8 rozwiązań).

2. Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej zbiory A i B , gdzie

$$A = \{z \in \mathbf{C} : (i+1)z + (i-1)\bar{z} = 4i\}$$

- prosta łącząca 2 i $2i$

$$B = \{z \in \mathbf{C} : (1-i)z + (2+i)\bar{z} = 4\}.$$

- jeden punkt $z = 4/3$

3. Znaleźć wszystkie zespolone pierwiastki wielomianu

$$w(z) = z^4 + 5z^2 - 10z + 14$$

wiedząc, że jednym z nich jest $z = 1 - i$.

- drugim pierwiastkiem jest $z = 1 + i$ (uzasadnienie?), liczymy $(z - 1 - i)(z - 1 + i) = z^2 - 2z + 2$ a następnie $(z^4 + 5z^2 - 10z + 14)/(z^2 - 2z + 2) = z^2 + 2z + 7$. Dwa pozostałe pierwiastki to $-1 \pm \sqrt{6}i$.

4. Obliczyć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 1 & 2a \\ 1 & 3 & a & a^2 \\ a & -3 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

w zależności od parametru $a \in \mathbf{R}$.

5. Zbadać i poprawnie uzasadnić, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ układ równań

$$\begin{cases} ax - 2y + z = a \\ x - 2y + az = a^2 \\ ax + 2y - 5z = -4 \end{cases}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań, a dla jakich dokładnie jedno?

Uwaga: Oczywiście dane w zadaniach 4 i 5 nie są identyczne, ale odwołanie się w rozwiązaniu jednego z nich do niektórych obliczeń z drugiego może przyspieszyć rozwiązanie.

- Ad 4 i 5: wyznacznik lewych trzech kolumn ma postać $c(a-1)(a-2)$. Dla $a = 1$ rząd w zad. 4 wynosi 3, a układ w 5 ma ∞ rozwiązań, dla $a = 2$ rząd to 2, a układ jest sprzeczny.

6. Wyznaczyć obie macierze 2×2 , których wartościami własnymi są liczby 1 i 2, a niektórymi wektorami własnymi

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- Może być albo

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

albo odwrotnie:

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dostajemy wtedy odpowiednio $X = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ lub $X = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$.