Mako 2 – kombinatoryka w praktyce

Celem tego pliku jest przedstawienie kilku rozwiązań zadań kombinatorycznych, a w szczególności pokazanie, że czasami to samo zadanie można rozwiązać na kilka sposobów i że uzyskane wyniki mogą na pierwszy rzut oka wyglądać różnie, choć są zupełnie poprawne.

1. Piłkarska reprezentacja kraju składa się z 23 (oczywiście rozróżnialnych) zawodników: 3 bramkarzy, 8 obrońców, 7 pomocników i 5 napastników. Ile istnieje różnych składów, czyli 11-osobowych podzbiorów owego 23-osobowego zbioru, zawierających dokładnie jednego bramkarza, czterech lub pięciu obrońców, co najmniej trzech pomocników i co najmniej jednego napastnika?

Rozwiązanie

Najpierw wypiszmy wszystkie zgodne z warunkami zadania ustawienia, czyli przedstawienia liczby 11 w postaci sumy czterech liczb odpowiadających poszczególnym formacjom:

$$11 = 1+4+3+3 = 1+4+4+2 = 1+4+5+1 = 1+5+3+2 = 1+5+4+1.$$

W następnym kroku policzmy, ile jest składów dla poszczególnych ustawień, np. dla ustawienia $1+4+3+3$ wybieramy bramkarza na $\binom{3}{1}$ sposobów, obrońców na $\binom{8}{4}$ sposobów, pomocników na $\binom{7}{3}$ sposobów i napastników na $\binom{5}{3}$ sposobów. Uzyskane liczby mnożymy, bo zawodników do każdej formacji można wybierać niezależnie, zatem wszystkich składów w ustawieniu $1+4+3+3$ jest $\binom{3}{1}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{3}$. Ponieważ zaś każdy poprawny skład należy do jednego z pięciu wyżej wymienionych ustawień, to liczby składów dla poszczególnych ustawień dodajemy. Oto wynik:

$$N = \binom{3}{1}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{3} + \binom{3}{1}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{5}{2} + \binom{3}{1}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{7}{5}\cdot\binom{5}{1} +$$

$$+\binom{3}{1}\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{2} + \binom{3}{1}\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{5}{1}$$

Można to uznać za końcowy wynik, lub pogrupować:

$$N = 3\cdot\binom{8}{4}\cdot\left(\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{3}+\binom{7}{4}\cdot\binom{5}{2}+\binom{7}{5}\cdot\binom{5}{1}\right)+3\cdot\binom{8}{5}\cdot\left(\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{2}+\binom{7}{4}\cdot\binom{5}{1}\right)$$

Liczbowo (dla sprawdzenia wyniku, jeśli ktoś używa innej metody)

$$N = 3\cdot 70\cdot(35\cdot 10+35\cdot 10+21\cdot 10)+3\cdot 56\cdot(35\cdot 10+35\cdot 5) = 210\cdot(910+420) = 279300$$

2. Ile jest trzyelementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 45\}$, w których co najmniej jeden element jest nieparzysty?

Rozwiązania (trzy metody)

Łatwo policzyć, że mamy 22 liczby parzyste i 23 nieparzyste. Dalej możliwe są co najmniej trzy podejścia:

a) Wszystkich trzyelementowych podzbiorów naszego zbioru jest $\binom{45}{3}$. Takich, w których nie ma ani jednego elementu nieparzystego, czyli wszystkie elementy są parzyste, jest $\binom{22}{3}$. Stąd wynik:

$$N = \binom{45}{3} - \binom{22}{3}.$$

b) W naszym zbiorze mogą być:

trzy liczby nieparzyste: $\binom{23}{3}$ zbiorów,

dwie nieparzyste i jedna parzysta: $\binom{23}{2} \cdot \binom{22}{1}$ zbiorów,

jedna nieparzysta i dwie parzyste: $\binom{23}{1} \cdot \binom{22}{2}$ zbiorów.

Stąd wynik

$$N = \binom{23}{3} + \binom{23}{2} \cdot \binom{22}{1} + \binom{23}{1} \cdot \binom{22}{2}.$$

c) Popatrzmy na to jak na losowanie: z urny wyciągamy bez zwracania trzy liczby, przy czym jeśli trafimy na liczbę nieparzystą, to zatrzymujemy się. Oto prawdopodobieństwa:

$$P(\text{pierwsza liczba jest nieparzysta}) = \frac{23}{45}$$

$$P(\text{pierwsza liczba jest parzysta, ale druga nieparzysta}) = \frac{22}{45} \cdot \frac{23}{44}$$

$$P(\text{pierwsze dwie liczby są parzyste, ale trzecia nieparzysta}) = \frac{22}{45} \cdot \frac{21}{44} \cdot \frac{23}{43}$$

Prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna wylosowana liczba jest nieparzysta, to suma powyższych trzech liczb, gdyż zdarzenia te są rozłączne:

$$p = \frac{23}{45} + \frac{22}{45} \cdot \frac{23}{44} + \frac{22}{45} \cdot \frac{21}{44} \cdot \frac{23}{43} = \frac{23}{45} + \frac{22}{45} \cdot \frac{23}{44} \cdot \left(1 + \frac{21}{43}\right) = \frac{23}{45} + \frac{23}{90} \cdot \frac{64}{43} = \frac{23}{45} \cdot \left(1 + \frac{32}{43}\right) =$$

$$= \frac{23}{45} \cdot \frac{75}{43} = \frac{23}{3} \cdot \frac{5}{43} = \frac{115}{129}.$$

Skoro zaś wszystkich trójek, czyli zdarzeń elementarnych jest $\binom{45}{3}$, to zdarzeń sprzyjających jest

$$N = \frac{115}{129} \cdot \binom{45}{3}.$$

3. Na ile sposobów można wybrać pięć kart z talii 52 kart (zawierającej standardowo cztery asy, cztery króle itd.) tak, aby wśród nich były co najmniej dwa asy, co najmniej jedna dama i co najmniej jeden król?

Rozwiązania (dwie metody)

a) W talii mamy 4 asy, 4 króle, 4 damy i 40 kart, które nazwiemy innymi. Aby wybrany pięcioelementowy podzbiór spełniał warunki zadania, musi on być jednej z następujących postaci:

- 3 asy, 1 król, 1 dama – $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1}$ możliwości;
- 2 asy, 2 króle, 1 dama – $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1}$ możliwości;
- 2 asy, 1 król, 2 damy – $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2}$ możliwości;
- 2 asy, 1 król, 1 dama, 1 inna karta – $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{40}{1}$ możliwości.

Końcowy wynik, tak jak w zadaniu z piłkarzami, jest sumą:

$$N = \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{40}{1}.$$

b) Aby pięcioelementowy podzbiór spełniał warunki zadania, musi on zawierać: dwa asy, jednego króla, jedną damę i piątą kartę (która w istocie może być asem, królem, damą lub jakąkolwiek inną kartą). Wybierzmy więc kolejno: 2 asy z 4, 1 króla z 4, 1 damę z 4 i 1 kartę z pozostałych 48 (bo niezależnie od tego, jakie były pierwsze cztery karty, mamy do wyboru 48, a każda z nich jest dobra). Daje nam to wynik:

$$N = \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{48}{1}.$$

A teraz **UWAGA!**

Jedno z powyższych rozwiązań jest błędne, i to nie rachunkowo, lecz pojęciowo (może jakieś możliwości nie są policzone, może coś jest policzone niepotrzebnie, a może jeden i ten sam obiekt bywa z jakiegoś powodu liczony kilka razy).

Zadanie. Proszę zrozumieć powyższe rozwiązania, być może sprawdzić wyniki liczbowe i zastanowić się

- które rozwiązanie (1, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b) jest złe,

następnie

- czy to złe rozwiązanie daje wynik za mały czy za duży[1], o ile za mały lub za duży i dlaczego (w szczególności na czym polega istota błędu)

i wreszcie

- jak można by to błędne rozwiązanie poprawić

[1] a może przypadkowo poprawny, bo logicznie rzecz biorąc niepoprawne rozwiązanie może dać dobry wynik liczbowy, przez co oczywiście nie staje się poprawne

Odpowiedzi

1. Rozwiązanie było poprawne

$$N = \binom{3}{1}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{3}+\binom{3}{1}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{5}{2}+\binom{3}{1}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{7}{5}\cdot\binom{5}{1}+$$
$$+\binom{3}{1}\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{2}+\binom{3}{1}\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{5}{1}=279300$$

2. Wszystkie rozwiązania poprawne.

$$N=\binom{45}{3}-\binom{22}{3}=\binom{23}{3}+\binom{23}{2}\cdot\binom{22}{1}+\binom{23}{1}\cdot\binom{22}{2}=\frac{115}{129}\cdot\binom{45}{3}=12650.$$

3. Na ile sposobów można tak wybrać pięć kart z talii 52 kart by były wśród nich co najmniej dwa asy, co najmniej jedna dama i co najmniej jeden król?

Poprawne rozwiązanie: W talii mamy 4 asy, 4 króle, 4 damy i 40 kart, które nazwiemy innymi. Aby wybrany pięcioelementowy podzbiór spełniał warunki zadania, musi on być jednej z następujących postaci:

- 3 asy, 1 król, 1 dama – $\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}=64$ możliwości;
- 2 asy, 2 króle, 1 dama – $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}=144$ możliwości;
- 2 asy, 1 król, 2 damy – $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2}=144$ możliwości;
- 2 asy, 1 król, 1 dama, 1 inna karta – $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{40}{1}=3840$ możliwości.

Końcowy wynik jest sumą: $N=64+144+144+3840=4192$.

Niepoprawne rozwiązanie: Aby pięcioelementowy podzbiór spełniał warunki zadania, musi on zawierać: dwa asy, jednego króla, jedną damę i piątą kartę (która w istocie może być asem, królem, damą lub jakąkolwiek inną kartą). Wybierzmy więc kolejno: 2 asy z 4, 1 króla z 4, 1 damę z 4 i 1 kartę z pozostałych 48 (bo niezależnie od tego, jakie były pierwsze cztery karty, mamy do wyboru 48, a każda z nich jest dobra). Daje nam to wynik:

$$N=\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{48}{1}=4608\neq 4192.$$

Usterka polega na tym, że w drugiej metodzie każda piątka typu AAAKD jest liczona trzy razy, bo nie da się określić, które dwa asy są dwoma „obowiązkowymi”, a który tym trzecim – „dodatkowym”. Podobnie układy AAKKD i AAKDD są liczone po dwa razy. I rzeczywiście

$$3\cdot 64+2\cdot 144+2\cdot 144+3840=4608.$$

Aby tę metodę uratować, trzeba by od 4608 odjąć to, co było zliczone wielokrotnie, czyli $2\cdot 64+144+144=416$.