Mako 2 – o (prostych) ciągach rekurencyjnych

Popatrzmy na dwa dość znane ciągi nieskończone: $(a_n) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ i $(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$. Oczywiście teoretycznie następne wyrazy tych ciągów mogłyby być zupełnie dowolne, ale tradycyjnie używa się wielokropka w nie do końca precyzyjnym sensie „dostrzeż możliwie prostą regułę i według niej wyznacz kolejne wyrazy”.[1]

W naszym przypadku można zauważyć, że $a_{n+1} = 2a_n$ (ciąg geometryczny, w którym następny wyraz jest dwukrotnością poprzedniego) oraz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (ciąg Fibonacciego, w którym następny wyraz jest sumą dwóch poprzednich).

Jest tu jednak pewna subtelność: ciąg $(3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots)$ również spełnia równanie $a_{n+1} = 2a_n$, a ciąg $(1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots)$ równanie $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Co do zasady samo **równanie rekurencyjne** ma (nieskończenie) wiele rozwiązań, a zbiór ich wszystkich nazywany jest **rozwiązaniem ogólnym**. Na przykład rozwiązaniem ogólnym równania $a_{n+1} = 2a_n$ jest $a_n = C \cdot 2^n$, gdzie C jest dowolną stałą[2], ale by wybrać konkretne rozwiązanie, zwane **rozwiązaniem szczególnym**, potrzebny jest **warunek początkowy**, np. $a_1 = 1$ lub $a_1 = 3$. Podobnie pełna definicja ciągu Fibonacciego musi wyglądać np. tak:

$$\begin{cases} F_1 & = & 1 \\ F_2 & = & 1 \\ F_{n+2} & = & F_{n+1} + F_n \ \text{ dla } \ n \geqslant 1, \end{cases}$$

bo dla innych dwóch pierwszych wyrazów otrzymamy inny ciąg.

Jednorodne równania liniowe

Jednorodne równanie liniowe (o stałych współczynnikach) to równanie, które da się zapisać w postaci

$$a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$$

dla pewnego naturalnego k, zwanego **rzędem** równania i pewnych stałych c_i. Na przykład $a_{n+1} - 2a_n = 0$ to równanie pierwszego rzędu, a $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ ma rząd 2.

Rozwiązaniami takiego równania są ciągi geometryczne postaci $a_n = r^n$, gdzie r jest pierwiastkiem **wielomianu charakterystycznego**

$$w(r) = r^k + c_{k-1}r^{k-1} + \ldots + c_1 r + c_0,$$

oraz wszystkie ich kombinacje liniowe. Najlepiej pokaże to przykład.

---

[1] na przykład zapis $(a_n) = (1, 2, \ldots)$ byłby zbyt wieloznaczny, bo mógłby też oznaczać ciąg $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$, a zapis $(a_n) = (1, \ldots)$ jest prawie bezwartościowy – mówi tylko, że $a_1 = 1$.

[2] w zasadzie dowolną, np. całkowitą, wymierną, rzeczywistą, a gdyby była potrzeba, to zespoloną albo nawet funkcją, wektorem lub macierzą – w ogólności czymkolwiek, co da się pomnożyć przez 2.

Przykład 1. Wyznaczyć wszystkie ciągi spełniające równanie $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$.

Rozwiązanie. Mamy do czynienia z jednorodnym równaniem liniowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$. Odpowiada mu wielomian charakterystyczny $r^2 - 5r + 6$, którego pierwiastkami są liczby 2 i 3. Mamy więc dwa proste rozwiązania szczególne: $a_n = 2^n$ i $a_n = 3^n$ oraz rozwiązanie ogólne $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$.

Sprawdzenie. Jeśli $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$, to

$$a_{n+1} = C_1 2^{n+1} + C_2 3^{n+1} = 2C_1 2^n + 3C_2 3^n$$

$$a_{n+2} = C_1 2^{n+2} + C_2 3^{n+2} = 4C_1 2^n + 9C_2 3^n$$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4C_1 2^n + 9C_2 3^n - 10C_1 2^n - 15C_2 3^n + 6C_1 2^n + 6C_2 3^n = 0,$$

bo $4 - 10 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$. Sprawdzenie udane.

Uwaga. Nie jest zupełnie oczywiste, że **wszystkie** rozwiązania naszego równania są tej postaci i innych nie ma, ale chętni mogą odpowiednie uzasadnienie wymyślić sami lub gdzieś doczytać.

Przykład 2. Wyznaczyć wszystkie ciągi spełniające $a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n)$.

Rozwiązanie. Tu z kolei mamy równanie[3] $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0$. Odpowiada mu wielomian charakterystyczny $r^2 - 2r + 2$, którego pierwiastkami są liczby $1 + i$ i $1 - i$. Mamy więc dwa rozwiązania szczególne: $a_n = (1+i)^n$ i $a_n = (1-i)^n$ oraz rozwiązanie ogólne $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$.

Uwaga. Komuś może wyda się dziwne, że pojawiły się liczby zespolone, ale tak to właśnie jest, skoro $\Delta < 0$. Czasami da się skorzystać z postaci trygonometrycznej liczby zespolonej oraz wzorów de Moivre'a:

$$1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm \sin\frac{\pi}{4} \cdot i\right)$$

$$(1 \pm i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} \pm \sin\frac{n\pi}{4} \cdot i\right)$$

$$a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n = (\sqrt{2})^n\left((C_1 + C_2)\cos\frac{n\pi}{4} + i(C_1 - C_2)\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

co można zapisać jako

$$a_n = D_1 \cdot (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} + D_2 \cdot (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}$$

[3]liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach, czego nie będę już powtarzał

Ciekawy jest też przypadek wielomianu z wielokrotnym pierwiastkiem.

Przykład 3. Wyznaczyć wszystkie ciągi spełniające $a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$.

Rozwiązanie. Tu z kolei mamy równanie $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$. Odpowiada mu wielomian charakterystyczny $r^2 - 4r + 4$, którego pierwiastkami są liczby 2 i 2 (pierwiastek podwójny). Wtedy jednym z rozwiązań szczególnych jest $a_n = 2^n$, a drugim[4] $a_n = n \cdot 2^n$. Rozwiązanie ogólne ma wtedy postać

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n2^n.$$

Przykład 4. Wyznaczyć wszystkie ciągi spełniające $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Rozwiązanie. Równanie: $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$. Wielomian charakterystyczny: $r^2 - r - 1$. Jego pierwiastki: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Rozwiązanie ogólne: $a_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Uwaga. Komuś może wyda się dziwne, że pojawiła się liczba $\sqrt{5}$, ale tak to właśnie jest, skoro $\Delta = 5$. Jeśli zażądamy dodatkowo, by $a_1 = a_2 = 1$, otrzymamy układ równań, z którego wyznaczymy $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, co prowadzi do **wzoru Bineta** na dowolny wyraz ciągu Fibonacciego:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ponieważ $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618$, drugi składnik w powyższym wzorze szybko dąży do zera i w przybliżeniu można napisać

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

a więc

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Przy okazji dowiadujemy się, że ciąg ilorazów kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego, czyli

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \ldots\right),$$

dąży do $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, i to całkiem szybko, bo $\frac{89}{55} = 1{,}6(18)$, a $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$.

[4] gdyby 2 było pierwiastkim potrójnym, mielibyśmy też trzecie rozwiązanie $a_n = n^2 \cdot 2^n$ itd.