Mako 2 – rekurencja; niejednorodne równania liniowe

Przypomnijmy, że jednorodne rekurencyjne równanie liniowe rzędu k o stałych współczynnikach to równanie postaci

$$a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$$

i że dla jego rozwiązania wyznacza się pierwiastki wielomianu charakterystycznego

$$w(r) = r^k + c_{k-1}r^{k-1} + \ldots + c_1 r + c_0.$$

Na przykład równanie $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ spełniają ciągi $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$, gdyż pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $r^2 - 5r + 6$ są liczby 2 i 3.

Teraz zajmiemy się równaniami typu

$$a_{n+k} + c_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n),$$

gdzie f jest pewną funkcją zmiennej n, przy czym raczej nie dowolną, lecz pewną kombinacją wielomianów i funkcji wykładniczych[1].

Najważniejszy jest tu

Fakt. Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego[2].

Rozwiązanie szczególne (RSRN) to jakiekolwiek rozwiązanie, a na ogół takie, które najłatwiej znaleźć, a do jego wyznaczania używa się zwykle metody przewidywań, która polega na tym, że jeśli $f(n) = W_k(n) \cdot c^n$, gdzie W_k jest danym wielomianem stopnia k, to przewiduje się (na ogół, czyli za wyjątkiem pewnego szczególnego przypadku, o którym mowa nieco niżej) rozwiązanie również w postaci $a_n = V_k(n) \cdot c^n$, gdzie V_k jest pewnym, chwilowo nieznanym, wielomianem stopnia k.

Przykład 1. Wyznaczyć wszystkie ciągi spełniające $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 6 \cdot 4^n$.

Rozwiązanie. RORN ma, jak już wiemy, postać $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$, natomiast RSRN poszukujemy w postaci $a_n = A \cdot 4^n$ (wielomian W jest tu stałą 6, a więc wielomianem stopnia zero, więc i V przewidujemy jako stałą). Obliczmy teraz

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = A \cdot 4^{n+2} - 5A \cdot 4^{n+1} + 6A \cdot 4^n = 16A \cdot 4^n - 20A \cdot 4^n + 6A \cdot 4^n = 2A \cdot 4^n.$$

Ponieważ jednak zgodnie z treścią zadania wyrażenie to ma równać się $6 \cdot 4^n$, to otrzymujemy $2A = 6$, czyli $A = 3$. Ostatecznie więc RSRN to $a_n = 3 \cdot 4^n$, a końcowym wynikiem jest

$$\text{(RORN)} \quad a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n.$$

[1] z dwóch równie ważnych powodów: bardziej skomplikowanych funkcji raczej nie spotyka się w praktyce, a dla zupełnie dowolnej funkcji f raczej trudno o ogólną metodę

[2] można to umownie zapisać RORN=RORJ+RSRN

Przykład 2. Wyznaczyć wszystkie ciągi spełniające $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4n$.

Rozwiązanie. RORN to nadal $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$, natomiast RSRN poszukujemy w postaci $a_n = An + B$ (wielomian W ma stopień 1, więc i V przewidujemy jako wielomian stopnia 1; stałej c tu jawnie nie widzimy, należy uznać, że wynosi ona 1). Obliczmy teraz

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = A(n+2) + B - 5(A(n+1) + B) + 6(An + B) = 2An - 3A + 2B.$$

Ponieważ jednak zgodnie z treścią zadania wyrażenie to ma równać się $4n$, to otrzymujemy $2A = 4$ oraz $-3A + 2B = 0$. Formalnie jest to układ równań, ale bardzo łatwy, więc od razu obliczamy $A = 2, B = 3$. Ostatecznie RSRN to $a_n = 2n + 3$, a końcowym wynikiem jest

$$\text{(RORN)} \ \ a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + 2n + 3.$$

Uwaga. Jednym z możliwych błędów jest przyjęcie RSRN w postaci $a_n = An$, bo niby prawa strona równania to tylko $4n$ bez wyrazu wolnego. Ale to nie jest dobrze, bo wtedy dostaniemy równanie $2An - 3A = 4n$, które nie ma rozwiązania[3].

Pewien kruczek pojawia się natomiast w kolejnym przykładzie.

Przykład 3. Wyznaczyć wszystkie ciągi spełniające $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2^n$.

Rozwiązanie. RORN to niezmiennie $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$, ale zobaczmy, co stałoby się, gdybyśmy przewidzieli RSRN w postaci $a_n = A \cdot 2^n$ (jak w przykładzie 1). Obliczylibyśmy wtedy

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = A \cdot 2^{n+2} - 5A \cdot 2^{n+1} + 6A \cdot 2^n = 4A \cdot 2^n - 10A \cdot 2^n + 6A \cdot 2^n = 0.$$

Ponieważ jednak zgodnie z treścią zadania wyrażenie to ma równać się 2^n, to otrzymujemy $2^n = 0$, czyli jakąś sprzeczność.

Problem polega na tym, że $A \cdot 2^n$ jest już rozwiązaniem równania jednorodnego, nie może więc być jednocześnie rozwiązaniem równania niejednorodnego.

Właściwym rozwiązaniem jest przyjęcie $a_n = A \cdot n \cdot 2^n$. Wówczas

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = A \cdot (n+2) \cdot 2^{n+2} - 5A \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1} + 6A \cdot n \cdot 2^n =$$

$$= A \cdot (4n + 8 - 10n - 10 + 6n) \cdot 2^n = -2A \cdot 2^n.$$

Teraz już można przyrównać $-2A \cdot 2^n = 2^n$ i uzyskać $A = -\frac{1}{2}$. Ostatecznie więc RSRN to $a_n = -\frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n = -n2^{n-1}$, a końcowym wynikiem jest

$$\text{(RORN)} \ \ a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n - n2^{n-1}.$$

[3] napisanie $A = \frac{4n}{2n-3}$ już całkiem nie miałoby sensu, bo A dotychczas było stałą

Wyjaśnienie dla dociekliwych: Przewidywaną postać RSRN należy pomnożyć przez n wtedy, gdy podstawa potęgi c (w tym przykładzie $c = 2$) jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego (w tym przykładzie $r^2 - 5r + 6$), a tak właśnie jest. Co więcej (wyjaśniam bardziej dociekliwym) ciąg a_n należy pomnożyć przez n^m, jeśli c jest $m-$krotnym pierwiastkiem tego wielomianu.