

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Σ
PKT.						

Imię i nazwisko

Numer albumu Numer grupy / prowadzący

1. Dane są punkty $A(2, 3, 4)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 2, 0)$ i $D(0, 0, 1)$.a) Jakie jest równanie płaszczyzny ABC ? ODP. $3x - 4y + z = -2$ b) Ile wynosi pole trójkąta ABC ? ODP. $\frac{\sqrt{26}}{2}$ c) Ile wynosi objętość czworościanu $ABCD$? ODP. $\frac{1}{2}$ 2. a) Dla jakiej wartości parametru a jednym z wektorów własnych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}.$$

jest wektor $[2, 2, 2]$? ODP. $a = 2$ b) Dla obliczonej w punkcie a) wartości a wyznaczyć wszystkie rzeczywiste wartości i wektory własne macierzy A . ODP. Wartości $0, 1, -3$, wektory (odpowiednio) $[0, y, y]$, $[x, x, x]$ i $[x, 0, -x]$ 3. a) Ile rozwiązań w parzystych, ale niepodzielnych przez 4, dodatnich liczb całkowitych ma równanie $a + b + c + d + e = 114$? ODP. $\binom{30}{4}$ b) Ile spośród powyższych rozwiązań ma ponadto taką własność, że wśród liczb a, b, c, d, e są dokładnie dwie mniejsze niż 30? ODP. $\binom{5}{2} \cdot \binom{9}{4}$ 4. Rozwiązać (czyli podać ogólny wzór na a_n)

$$\begin{cases} a_0 &= 3 \\ a_1 &= 4 \\ a_{n+2} &= 5a_{n+1} - 6a_n + 2^n - 4 \text{ dla } n \geq 0 \end{cases}$$

i ustalić czy a_{2025} jest liczbą parzystą. ODP. $a_n = 8 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n - \frac{n}{2} \cdot 2^n - 2$, a_n jest nieparzyste dla $n \geq 2$ 5. Rozważmy drzewa o wierzchołkach $1, \dots, 8$. Na mocy tw. Cayleya jest ich 8^6 .a) W ilu drzewach stopnie wierzchołków 2 i 5 równają się 3? ODP. $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 6^2$ b) W ilu drzewach (spośród wszystkich 8^6) stopnie wierzchołków 2 i 5 równają się 3, a jednocześnie co najmniej pięć innych wierzchołków ma stopień 1? ODP. $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 6$ c) Narysować drzewo o kodzie Prüfera $[2, 3, 5, 5, 2, 3]$. ODP. Ścieżka $4 - 3 - 2 - 5 - 6$ z dodatkowymi krawędziami $3 - 8, 2 - 1, 5 - 7$