EGZAMIN z MAKO2 19.06.2024 r.

1. a) Dla jakiej wartości parametru a wektor $(1, 0, -1)$ jest wektorem własnym macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & a \end{bmatrix}$$

b) Dla znalezionej wyżej wartości a wyznaczyć wszystkie wektory własne tej macierzy.

2. Dane są punkty $A(-1, 1, -3), B(3, -1, 1), C(-2, 2, -1)$ i $D(2, -1, 1)$.
Obliczyć odległość między prostymi AB i CD (dowolną metodą, ale proszę ją jasno opisać).

3. a) Ile różnych liczb można uzyskać permutując 13 cyfr 2223333355666 ?
b) Ile jest wśród nich liczb podzielnych przez 4?
c) Ile jest wśród nich liczb podzielnych jednocześnie przez 3 i przez 4?
d) Ile jest wśród wszystkich liczb opisanych w punkcie a) takich, w których nie stoją obok siebie dwie cyfry nieparzyste?

4. a) Ile rozwiązań w całkowitych dodatnich liczbach nieparzystych ma równanie $a + b + c + d + e = 99$?
b) W ilu z tych rozwiązań liczby a i b są większe niż 40?
c) W ilu z rozwiązań opisanych w punkcie a) nie ma żadnej liczby większej niż 40?

5. Rozwiązać (czyli podać ogólny wzór na a_n)

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ a_1 & = & 3 \\ a_{n+2} & = & 2(a_{n+1} - a_n + n) \text{ dla } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Ile jest wśród 1000 wyrazów $a_{1000}, a_{1001}, \ldots, a_{1999}$ liczb podzielnych przez 4, a ile liczb dodatnich?

6. a) Ile jest drzew o wierzchołkach $\{1, \ldots, 7\}$, w których każdy wierzchołek o nieparzystym numerze jest liściem?
b) Ile jest drzew o wierzchołkach $\{1, \ldots, 7\}$, w których każdy liść ma nieparzysty numer?
c) Narysować przykładowe drzewo spełniające jednocześnie warunki a) i b) oraz podać jego kod Prüfera.

ODPOWIEDZI

Uwaga: w wielu przypadkach możliwe są inne rozwiązania, dające inne wzory, ale ten sam wynik końcowy

1. a) $a = -3$ (przy wartości własnej -2).
b) $(-z, 0, z)$ dla wart. wł. -2 oraz $(0, 2z, z)$ dla wart. wł. 1.

2. Przykładowy wzór: $\frac{AC \cdot (AB \times CD)}{|AB \times CD|} = \frac{2}{3}$.

3. a) $\frac{13!}{3!5!2!3!} = 720720$.
b) $\frac{(5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3) \cdot 11!}{3!5!2!3!} = 194040$.
c) 0 (permutowanie cyfr nie ma wpływu na podzielność przez 3).
d) $\binom{7}{5}\binom{6}{3} = 420$ (cyfry parzyste i nieparzyste muszą występować na przemian).

4. a) $\binom{51}{4} = 249900$.
b) $\binom{11}{4} = 330$.
c) $\binom{51}{4} - \binom{5}{1}\binom{31}{4} + \binom{5}{2}\binom{11}{4} = 95875$.

5. $a_n = \frac{1}{2}(1+i)^n + \frac{1}{2}(1-i)^n + 2n = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4} + 2n$.
Jest 500 liczb podzielnych przez 4 (wskazówka: wszystkie a_n, zaczynając od a_2, są parzyste) i 625 podzielnych przez 8 (wskazówka: pięć z każdych kolejnych ośmiu).

6. a) $3^5 = 243$.
b) $\binom{5}{3} \cdot 3! \cdot 4^2 + 3 \cdot \frac{5!}{2!1!1!1!} \cdot 4 + 3 \cdot \frac{5!}{3!1!1!} + 3 \cdot \frac{5!}{2!2!1!} = 1830$.
inna metoda daje $7^5 - \binom{3}{1}6^5 + \binom{3}{2}5^5 - \binom{3}{3}4^5 = 1830$.
c) np. $(2, 2, 2, 4, 6)$.