EGZAMIN ZEROWY z MAKO2 15.06.2022 r.

WYBIERAMY 4 ZADANIA. WSZYSTKIE ODPOWIEDZI UZASADNIAMY.

1. a) Niech Q będzie sześcianem ograniczonym płaszczyznami $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$. Wykazać, że część wspólna Q i płaszczyzny $z = x + y$ jest sześciokątem foremnym, i znaleźć jego pole.
b) Niech T będzie czworościanem o wierzchołkach $(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$. Zbadać, jaką figurą jest część wspólna T i płaszczyzny $z = a$, i znaleźć jej pole (zapewne zależne od parametru a).

2. a) (8 pkt.) Wyznaczyć wielomiany charakterystyczne i wszystkie rzeczywiste wartości i wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

oraz wszystkie ich rzeczywiste wartości i wektory własne.

b) (do 7 pkt.) Zauważyć, że niektóre z powyższych wielomianów, wartości i wektorów bywają równe, a inne bardzo podobne. Sformułować i uzasadnić ogólne (dotyczące wszystkich macierzy 2×2, a może też $n \times n$) stwierdzenia z tym związane.

3. Obliczyć, na ile sposobów można podarować sześciorgu rozróżnialnym dzieciom 50 jednakowych niepodzielnych lizaków tak, by Ania dostała ich co najmniej 5, Bartek co najwyżej 7, Felek co najwyżej 11 i żeby każde dziecko miało nieparzystą liczbę lizaków.

4. Rozwiązać (czyli podać ogólny wzór na a_n)

$$\begin{cases} a_0 & = & 2 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+2} & = & 5a_{n+1} - 6a_n + 2^n - 4 \text{ dla } n \geqslant 0 \end{cases}$$

i obliczyć a_{2022}.

5. Rozważmy drzewa o wierzchołkach $1, \ldots, 10$. Na mocy tw. Cayleya jest ich 10^8.
a) W ilu spośród tych stu milionów drzew stopniem wierzchołka 4 jest dokładnie 5?
b) A ile drzew (spośród owych stu milionów) ma taką własność: stopnie wierzchołków 1 i 2 są oba większe od 4, ale wierzchołki 1 i 2 nie są połączone krawędzią?

6. Określmy następujące grafy:
• **koło** W_n ma $n + 1$ wierzchołków, w tym n tworzących cykl i jeden (zwykle przedstawiany jako środek koła) połączony z wszystkimi pozostałymi;
• **bardzo szeroka ścieżka** P_n^3 ma n wierzchołków ponumerowanych kolejnymi liczbami, a krawędzie łączą w niej wierzchołki o numerach różniących się o 1,2 lub 3.
a) Ile krawędzi ma W_{2020}? Ile wynosi liczba chromatyczna tego grafu?
b) Ile krawędzi ma P_{2021}^3? Ile wynosi liczba chromatyczna tego grafu?

Liczba chromatyczna $\chi(G)$ to najmniejsza możliwa liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania wierzchołków grafu G w taki sposób, by wierzchołki tego samego koloru nigdy nie były połączone krawędzią.