

MATEMATYKA KONKRETNA 2, ZESTAW 0

1. Wykazać, że dla dowolnych liczb zespolonych w, z zachodzą równości:

$$|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(w\bar{z})$$

$$|w - z|^2 = |w|^2 + |z|^2 - 2 \operatorname{Re}(w\bar{z})$$

$$|w + z|^2 + |w - z|^2 = 2|w|^2 + 2|z|^2$$

Dlaczego ostatnia z nich nosi nazwę tożsamości równoległoboku?

2. Pamiętając twierdzenie cosinusów dla trójkąta ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$) i korzystając z wyników zadania 1, podać wzór na cosinus kąta BCA w trójkącie o wierzchołkach $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(0, 0)$. Czemu z kolei równa się sinus tego kąta?

3. Pamiętając jeden z wzorów na pole trójkąta ($S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$) i korzystając z wyników zadania 2, wykazać, że pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(0, 0)$ wynosi

$$S = \frac{1}{2} |x_A y_B - x_B y_A|.$$

4. Wykazać, że długości boków czworokąta wypukłego $ABCD$ spełniają zależność $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekątne AC i BD są prostopadłe.

5. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $(0, 0), (8, 3), (13, 5)$. Objaśnić na tej podstawie „zagadkę brakującego kwadratu” (opisaną m.in. na stronie pod takim tytułem w Wikipedii).

6. Z archiwum pirata Zespolonego: „Znajdź polanę z samotnym dębem, sosną i kępą wrzosu. Idź od wrzosu do dębu, licząc kroki, po czym skręć pod kątem prostym w prawo, zrób jeszcze raz tyle samo kroków i wbij tyczkę. Następnie wróć do wrzosu, skieruj się do sosny, skręć pod kątem prostym w lewo i zrób tyle kroków, ile było od wrzosu do sosny. Skarb jest teraz w połowie drogi między tobą a tyczką”. Niestety, przez lata cała polana zarosła wrzosem (choć nadal jest na niej tylko jeden stary dąb i jedna sosna). Jak znaleźć skarb?