

MATEMATYKA KONKRETNA 2, ZESTAW 2

Co do zasady „wyznaczyć kąt” należy rozumieć jako „wyznaczyć cosinus, tangens, ewentualnie sinus kąta”.

1. Uzasadnić, że jeśli tak wybierzemy cztery wierzchołki sześcianu, by nie wziąć obu końców żadnej z jego krawędzi, to powstanie czworościan foremny. Metodami geometrii analitycznej wyznaczyć:

- a) kąt między ścianą czworościanu a nieleżącą na niej krawędzią;
- b) kąt (tzw. dwuścienny) między ścianami czworościanu;
- c) kąt wierzchołek-środek-wierzchołek;
- d) promień sfery opisanej na czworościanie foremnym o krawędzi długości a ;
- e) promień sfery wpisanej w czworościan foremny o krawędzi długości a (czyli stycznej do jego ścian);
- f) promień sfery półwpisanej w czworościan foremny o krawędzi długości a (stycznej do wszystkich jego krawędzi);
- g) objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości a .

Wskazówka: Jeśli odpowiednio dobierzemy wyjściowy sześcian, to wybranymi wierzchołkami mogą być $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ i $(1, 1, 0)$. Łatwo wtedy będzie wyliczyć równania płaszczyzn ścian, iloczyny skalarne i wektorowe oraz wszystko inne, co będzie potrzebne.

2. Sześć środków ścian sześcianu wyznacza natomiast bryłę zwaną ośmiościanem foremnym. Obliczyć dla ośmiościanu to, co w zad. 1 dla czworościanu.

Wskazówka: Jeśli odpowiednio dobierzemy wyjściowy sześcian, to wierzchołkami ośmiościanu mogą być $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ i $(0, 0, \pm 1)$.

3. Dane są punkty $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$. Znaleźć w przestrzeni wszystkie punkty P , dla których kąty APB , BPC i CPA są proste.

Wskazówka 1: Oczywiście $(0, 0, 0)$ ma tę własność, ale czy to jedyny taki punkt?

Wskazówka 2: Nie, jest i drugi. Gdzie?

4. Dane są punkty $A(2, -3, 1)$, $B(-2, 1, -3)$, $C(-3, 3, -1)$ oraz $D(1, -3, 1)$. Obliczyć odległość między prostymi AB i CD .

4*. Obliczyć tę odległość inną metodą.

4**. Obliczyć tę odległość jeszcze inną metodą.

...

4[∞]. Zebrać wszystkie metody pozwalające obliczyć tę odległość.

Uwaga: Zadanie 4[∞] jest nieskończenie trudne, ale proszę mocą grupowego intelektu zaproponować choć kilka sposobów. W katalogu przedmiotu pojawi się niedługo specjalny plik z dodatkowymi wskazówkami do tego zadania.