4. Dane są punkty $A(2,-3,1), B(-2,1,-3), C(-3,3,-1)$ oraz $D(1,-3,1)$. Obliczyć odległość między prostymi AB i CD.

Poniżej naszkicujemy pewną liczbę rozwiązań. Uzupełnienie wielu szczegółów, tak pojęciowych, jak i rachunkowych, oraz ewentualne naszkicowanie rysunków pozostawiam Czytelnikowi.

Zadanie nasze można rozwiązać różnymi metodami, które podzielimy na kilka grup.

A. W pierwszej będziemy poszukiwać pary płaszczyzn równoległych π_1 i π_2, takich że $AB \subset \pi_1, CD \subset \pi_2$.

α) Podejście bezpośrednie: niech równaniami π_1 i π_2 będą odpowiednio $Kx+Ly+Mz+N_1=0$ i $Kx+Ly+Mz+N_2=0$. Skoro A i B leżą na π_1, a C i D na π_2, to

$$2K-3L+M=N_1$$

$$-2K+L-3M=N_1$$

$$-3K+3L-M=N_2$$

$$K-3L+M=N_2$$

Odejmijmy drugie równanie od pierwszego, a trzecie od czwartego:

$$4K-4L+4M=0$$

$$4K-6L+2M=0$$

Ponownie odejmując, dostaniemy $L=-M$. Podstawiając to, otrzymamy kolejno $K=-2M$, $N_1=0$ i $N_2=2M$. Zatem równania płaszczyzn to $-2x-y+z=0$ i $-2x-y+z=0$, a ich odległość wynosi $d=\frac{|N_2-N_1|}{\sqrt{K^2+L^2+M^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

β) Szukane płaszczyzny są równoległe do obu wektorów $\overrightarrow{AB}=[-4,4,-4]$ i $\overrightarrow{CD}=$ $=[4,-6,2]$, są więc prostopadłe do $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=[-16,-8,8]=8\,[-2,-1,1]$. Ich równania mają więc postać $-2x-y+z=c$. Podstawiając kolejne punkty znajdziemy dokładną postać owych równań i zakończymy jak w metodzie α)

B. Inne podejście zakłada znalezienie na prostych AB i CD punktów najbliżej położonych. Dowolny punkt prostej AB ma postać

$$X=tA+(1-t)B=(4t-2,-4t+1,4t-3),$$

a dowolnym punktem CD jest

$$Y=sC+(1-s)D=(-4s+1,6s-3,-2s+1).$$

Kwadrat odległości obliczymy z tw. Pitagorasa:

$$f(s,t)=d^2(X,Y)=(4t+4s-3)^2+(-4t-6s+4)^2+(4t+2s-4)^2.$$

Teraz należy poszukać najmniejszej wartości funkcji f.

γ) Metoda radykalna: wchodzimy na stronę wolframalpha.com , wpisujemy w okienko

`(4t+4s-3)^2+(-4t-6s+4)^2+(4t+2s-4)^2`

i naciskamy enter. Wśród wielu informacji, którymi zasypie nas komputer, znajdziemy i taką:

$$\min\{(4t+4s-3)^2+(-4t-6s+4)^2+(4t+2s-4)^2\} = \frac{2}{3} \text{ at } (s,t) = \left(0, \frac{11}{12}\right)$$

czyli szukana odległość to $d = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

δ) Metoda spokojna: obliczamy pochodne cząstkowe funkcji f:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 8(4t+4s-3) - 8(-4t-6s+4) + 8(4t+2s-4) = 8(12t+12s-11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 8(4t+4s-3) - 12(-4t-6s+4) + 4(4t+2s-4) = 8(12t+14s-11)$$

i przyrównujemy obie te pochodne do zera, co daje $12t+12s = 12t+14s = 11$, skąd od razu $s = 0$ i $t = \frac{11}{12}$. Bezpośrednie podstawienie daje $f(0, \frac{11}{12}) = \frac{2}{3}$ i $d = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

ε) Metoda pomysłowa: najkrótszy odcinek XY musi być prostopadły zarówno do AB:

$$0 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{XY} = 4(4t+4s-3) - 4(-4t-6s+4) + 4(4t+2s-4) = 4(12t+12s-11)$$

jak i do CD:

$$0 = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{XY} = -4(4t+4s-3) + 6(-4t-6s+4) - 2(4t+2s-4) = -4(12t+12s-11).$$

Dostajemy te same równania, co w metodzie δ), i tak samo dokończymy rozwiązanie.

ζ) Metoda niezalecana z powodu praktycznej niemożliwości niepomylenia się w rachunkach, ale ogólnie bardzo słuszna: otwieramy wszystkie nawiasy w definicji funkcji $f(s,t)$ i zapisujemy

$$f(s,t) = 56s^2 + 96st + 48t^2 - 88s - 88t + 41 = 56s^2 + (96t-88)s + 48t^2 - 88t + 41$$

Najmniejsza wartość tej funkcji przy zmiennym s dla ustalonego t to, zgodnie ze wzorem $-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{b^2}{4a} + c$, czyli

$$-\frac{(96t-88)^2}{224} + 48t^2 - 88t + 41 = \frac{48t^2 - 88t + 45}{7},$$

a że tym razem $\Delta = 88^2 - 4 \cdot 48 \cdot 45 = -896$, to najmniejszą wartością tej funkcji jest

$$\frac{896}{4 \cdot 48 \cdot 7} = \frac{2}{3}.$$

C. Tym razem przyda się wiedza, że pole równoległoboku rozpiętego przez wektory b i c to $\|b \times c\|$, a objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory a, b i c to $|a \cdot (b \times c)|$.

η) Zachodzi równość:

$$d = \frac{|a \cdot (b \times c)|}{\|b \times c\|},$$

gdzie $a = \overrightarrow{AC}, b = \overrightarrow{AB}, c = \overrightarrow{CD}$. Podstawienie danych liczbowych daje (proszę sprawdzić) wynik $d = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
Uwaga: w charakterze wektora a można też wziąć $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ lub $\overrightarrow{BD}$, jeśli miałoby to np. uprościć rachunki.