

MATEMATYKA KONKRETNA 2, ZESTAW 3

1. Wyznaczyć wielomiany charakterystyczne macierzy

$$\begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

ODPOWIEDZI: $t^2 - 1$, $t^2 + 1$, $(1 - t)(t^2 - 3t + 2)$, $-t^3 + 3t^2 - 4$, $-t^3 + 12t + 16$.

2. Wyznaczyć wartości i wektory własne powyższych macierzy.

ODPOWIEDZI: Kolejno:

wartość $t = 1$ z wektorami $[a, 2a]$ i wartość $t = -1$ z wektorami $[-2a, a]$;
wartość $t = i$ z wektorami $[a, a \cdot i]$ i wartość $t = -i$ z wektorami $[a, -a \cdot i]$;
wartość $t = 1$ z wektorami $[-2a, b, a]$ i wartość $t = 2$ z wektorami $[3a, 2a, -a]$;
wartość $t = -1$ z wektorami $[a, 0, -a]$ i wartość $t = 2$ z wektorami $[0, 2a, a]$;
wartość $t = -2$ z wektorami $[a, a + b, b]$ i wartość $t = 4$ z wektorami $[a, a, 2a]$.

3. Uzasadnić, że gdy macierz A ma wartość własną t , to $3A$ ma wartość własną $3t$, $A - I$ ma wartość własną $t - 1$, a A^2 ma wartość własną t^2 .

4. Wyznaczyć wartości i wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uzyskane wyniki omówić w kontekście zad. 3.

5. Wyznaczyć macierz 2×2 , której wartościami własnymi są liczby 6 oraz -4 , a wektorami własnymi $[-1, 2]$ oraz $[2, 1]$ Czy jest tylko jedna taka macierz?

Częściowa ODP.: Nie, są dokładnie dwie.