Mako 2 - zestaw 4′ (prawie elementarna kombinatoryka)

1. Jak można rozumieć i jak (być może różnymi sposobami) można udowodnić następujące tożsamości kombinatoryczne:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{2} = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$$

$$\binom{n+1}{3} = \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{2n} = \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \ldots + \binom{2n}{2n-1}$$

$$0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$2^0 \cdot \binom{n}{0} + 2^1 \cdot \binom{n}{1} + \ldots + 2^n \cdot \binom{n}{n} = 3^n$$

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{0} + \binom{m}{k-1} \cdot \binom{n}{1} + \ldots + \binom{m}{0} \cdot \binom{n}{k}$$

2. (uzupełnienie o charakterze technicznym do poprzedniego zadania)
a) Dla jakich wartości parametrów powyższe tożsamości są poprawne?
b) Tożsamości zapisane z użyciem kropek $(\ldots)$ proszę przepisać, używając symbolu sumowania Σ.

3. Antoni, Bogusław i Cyprian chcą usiąść na $n+1$ ustawionych w jednym rzędzie krzesłach, z tym że Bogusław musi siedzieć pośrodku. Zliczając, na ile sposobów jest to możliwe, wykazać równość

$$\sum_{k=0}^{n} k(n-k) = \binom{n+1}{3}.$$

4. Agata, Barbara i Celina chcą usiąść na $n+1$ ustawionych w jednym rzędzie dwuosobowych kanapach, z tym że Agata chce siedzieć sama, i to koniecznie bliżej początku rzędu (czyli na kanapie o mniejszym numerze) niż każda z jej koleżanek. Zliczając, na ile sposobów jest to możliwe, wykazać równość

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2 \cdot \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

5*. Uzasadnić, że pola kwadratowej szachownicy $n \times n$ tworzą $\binom{n+1}{2}^2$ różnych niepustych prostokątów. Wykazać, zliczając te prostokąty w pomysłowy sposób, że jest ich również $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$, czyli że zachodzi równość

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \binom{n+1}{2}^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$