Mako 2 - zestaw 5

1. Ile rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich (przypominam, że 0 nie jest liczbą dodatnią) ma równanie

$$a + b + c + d + e + f = 18?$$

(rozwiązaniem nazywamy uporządkowaną szóstkę liczb, więc $3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 1$ i $3 + 3 + 3 + 5 + 1 + 3$ to różne rozwiązania).
W ilu spośród tych rozwiązań wszystkie liczby $a, \ldots, f$ są parzyste, w ilu wszystkie są nieparzyste, w ilu zaś dokładnie dwie z tych liczb są parzyste?

2. Na ile sposobów można podarować sześciorgu rozróżnialnym dzieciom 18 identycznych lizaków tak, żeby każde dziecko dostało ich co najmniej 2, ale mniej niż 6?

3. Na ile sposobów k rozróżnialnych osób może usiąść na n ustawionych w jednym rzędzie krzesłach, tak aby między dwiema osobami było zawsze co najmniej jedno wolne krzesło?

4. Każdy z 50 uczestników zajęć w lokalnym domu kultury umie śpiewać, malować lub grać na pianinie, przy czym 25 osób umie to wszystko. Wiedząc, że 10 osób nie umie śpiewać, 12 grać na pianinie, a 14 malować, ustalić, ile osób ma tylko jedną z owych trzech umiejętności.

5. Cztery osoby oddały swoje okrycia do szatni. Niestety numerki pomieszały się, w wyniku czego przy odbiorze każdy dostanie jakieś ubranie, ale niekoniecznie swoje. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że nikt nie dostanie własnego ubrania? Jakie, że dokładnie jedna osoba dostanie swoje ubranie? Dwie? Trzy? Cztery? Gdyby takie doświadczenie powtarzać wielokrotnie, jaka byłaby przeciętna liczba osób, które dostaną własne ubranie (tzw. wartość oczekiwana)?

6. Z cyfr $1, 2, 3, 4, 5$ można utworzyć $5^7 = 78125$ liczb siedmiocyfrowych (oczywiście cyfry mogą, a nawet muszą się powtarzać). W ilu spośród tych 78125 liczb nie brakuje żadnej z pięciu cyfr?
Wskazówka: Można użyć zarówno metody bezpośredniej, jak i używającej zasady włączeń-wyłączeń. W tej drugiej wypada zacząć od zdefiniowania pięciu zbiorów A_i, złożonych z tych liczb, w których brak cyfry i.

6.* Używając zasady włączeń-wyłączeń, jak w rozwiązaniu poprzedniego zadania, wykazać następujący ogólny wzór na liczbę funkcji o dziedzinie $\{1, 2, \ldots, n\}$ i zbiorze wartości $\{1, 2, \ldots, k\}$:

$$S(n, k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k - i)^n.$$

Na przykład $S(7, 5) = \binom{5}{0}5^7 - \binom{5}{1}4^7 + \binom{5}{2}3^7 - \binom{5}{3}2^7 + \binom{5}{4}1^7 - \binom{5}{5}0^7 = 16800.$