

MAKO 2 – ZESTAW 7 (GRAFY, CZ. 1)

Słowo *graf* będzie oznaczać **prosty graf nieskierowany**, czyli skończony zbiór punktów zwanych wierzchołkami, oraz łączących niektóre pary wierzchołków linii zwanych krawędziami (bez strzałek, pętli i krawędzi wielokrotnych).

1. Pokazać, że w dowolnej grupie co najmniej dwóch osób istnieją takie dwie, które mają tyle samo znajomych (w tej grupie). Zakładamy, że relacja znajomości jest symetryczna, tzn. gdy osoba A zna osobę B, to i B zna A.

2. Przy założeniu symetrii relacji znajomości

- a) pokazać, że wśród 6 osób zawsze znajdują się trzy osoby, które znają się nawzajem, lub trzy osoby, z których żadna nie zna dwóch pozostałych,
- b*) pokazać, że wśród 9 osób zawsze znajdują się takie trzy, które znają się nawzajem, lub takie cztery, z których żadna nie zna trzech pozostałych.

3. Ile istnieje różnych grafów o 4 wierzchołkach i 2 krawędziach,

- a) jeśli wierzchołki są rozróżnialne,
- b) jeśli wierzchołki są nierozróżnialne?

4. Ile istnieje różnych grafów o 4 wierzchołkach i 4 krawędziach,

- a) jeśli wierzchołki są rozróżnialne,
- b) jeśli wierzchołki są nierozróżnialne?
- c) Dlaczego wyniki tego zadania są takie same jak poprzedniego?

5. Uzasadnić, że jeśli graf G ma parzystą liczbę wierzchołków $2m$, a każdy z nich ma dodatni parzysty stopień $2n$, to G ma również parzystą liczbę krawędzi.

6. Podać przykład grafu H , który ma parzystą liczbę wierzchołków, a każdy z nich ma dodatni parzysty stopień, ale ma (ów graf H) nieparzystą liczbę krawędzi (a przy okazji wyjaśnić, czym różni się to zadanie od poprzedniego).

7. Czy istnieje graf

- a) o czterech wierzchołkach, których stopnie to $(1,2,2,2)$,
 - b) o czterech wierzchołkach, których stopnie to $(1,2,2,3)$,
 - c) o czterech wierzchołkach, których stopnie to $(1,1,3,3)$,
 - d) o sześciu wierzchołkach, których stopnie to $(1,1,2,2,3,3)$,
 - e) o siedmiu wierzchołkach, których stopnie to $(4,4,4,4,4,4,4)$?
- Jeśli tak, to narysować przykład, jeśli nie, to uzasadnić, dlaczego.

8. Ile istnieje różnych grafów opisanych w zadaniu 7e), jeśli

- a) wierzchołki są rozróżnialne
- b) wierzchołki są nierozróżnialne?