Mako 2 – grafy

7.1. Pokazać, że w dowolnej grupie co najmniej dwóch osób istnieją takie dwie, które mają tyle samo znajomych (w tej grupie). Zakładamy, że relacja znajomości jest symetryczna, tzn. gdy osoba A zna osobę B, to i B zna A.

Rozwiązanie

Niech osób, czyli wierzchołków grafu, będzie n. Każda z nich zna pewną liczbę osób, a ta liczba (zwana stopniem wierzchołka) należy do zbioru $\{0, \ldots, n-1\}$. Wydawałoby się, że każdy wierzchołek może mieć inny stopień, bo wierzchołków jest n, a różnych możliwych stopni też n. Wtedy jednak np. A miałby zero znajomych, B jednego i tak dalej aż do Z, który miałby $n-1$ znajomych. Czyli A nie zna nikogo, zatem nie zna Z, a Z zna wszystkich, czyli również A. Sprzeczność.

7.2. Przy założeniu symetrii relacji znajomości

a) pokazać, że wśród 6 osób zawsze znajdą się trzy osoby, które znają się nawzajem, lub trzy osoby, z których żadna nie zna dwóch pozostałych,

b) pokazać, że wśród 9 osób zawsze znajdą się takie trzy, które znają się nawzajem, lub takie cztery, z których żadna nie zna trzech pozostałych.

Rozwiązanie

a) Jeśli A zna co najmniej trzy osoby (np. B, C i D), to:

– jeśli B zna C, B zna D lub C zna D, to te dwie znające się osoby wraz z A tworzą znający się trójkąt;

– w przeciwnym przypadku B, C i D tworzą nieznający się trójkąt.

Jeśli zaś A zna najwyżej dwie osoby, to pewnych trzech nie zna i to powyższe rozumowanie można powtórzyć, mówiąc „nie zna” zamiast „zna” i na odwrót.

b) Jeśli A zna co najmniej cztery osoby (np. B, C, D i E), to:

– jeśli dowolne dwie osoby spośród B, C, D i E znają się, to wraz z A tworzą znający się trójkąt;

– w przeciwnym przypadku B, C, D i E tworzą nieznający się czworokąt.

Jeśli A zna najwyżej dwie osoby, to nie zna co najmniej sześciu. Wtedy wśród tych osób na mocy punktu a) istnieje znający się trójkąt lub nieznający się trójkąt, a ten ostatni wraz z A tworzy nieznający się czworokąt.

Pozostaje tylko przypadek, w którym A zna dokładnie 3 osoby. Ale A był wybrany dowolnie, a nie jest możliwe, by w grafie o 9 wierzchołkach każdy miał stopień 3.

7.4.c – parafraza
Jakie zjawisko powoduje, że różnych grafów o 4 wierzchołkach i 4 krawędziach jest tyle samo, co różnych grafów o 4 wierzchołkach i 2 krawędziach?

Rozwiązanie
Dwa grafy G_1 i G_2 o tym samym zbiorze n wierzchołków nazywamy **dopełniającymi** i piszemy $G_2 = \overline{G_1}$, jeśli dowolne wierzchołki u i v połączone krawędzią w G_1 są niepołączone w G_2 i odwrotnie. Oczywiście grafy dopełniające mają w sumie tyle krawędzi ile w ogóle jest możliwych dla danego zbioru wierzchołków, czyli $\binom{n}{2}$. W naszym przykładzie jeśli G_1 ma 4 krawędzie, to G_2 ma ich $\binom{4}{2} - 4 = 2$.

7.8 (w połączeniu z **8.1.c**) Ile istnieje różnych grafów $3-$regularnych o sześciu wierzchołkach, a ile $4-$regularnych o 7 wierzchołkach, jeśli
a) wierzchołki są rozróżnialne
b) wierzchołki są nierozróżnialne?

Rozwiązanie
Graf dopełniający do $3-$regularnego grafu o sześciu wierzchołkach jest grafem $2-$regularnym, podobnie jak graf dopełniający do $4-$regularnego grafu o siedmiu wierzchołkach.

Graf $2-$regularny jest zaś cyklem lub sumą pewnej liczby rozłącznych cykli. I tak dla $n = 6$ może to być C_6 lub $C_3 \sqcup C_3$, a dla $n = 7$ C_7 lub $C_4 \sqcup C_3$. Zatem przy nierozróżnialnych wierzchołkach odpowiedzią w obu przypadkach jest liczba 2.

Jeśli jednak wierzchołki będą rozróżnialne, ta liczba wzrośnie znacząco: np. dla $n = 7$ mamy
– $\frac{6!}{2} = 360$ możliwości ponumerowania cyklu C_7 (dzielimy przez 2 ze względu na możliwość symetrycznego odbicia)
– $\binom{7}{4} \cdot 3 = 105$ możliwości ponumerowania pary cykli $C_4 \sqcup C_3$, gdyż najpierw trzeba rozdzielić 7 wierzchołków na zbiór cztero- i trzyelementowy, a potem jeszcze wybrać jeden z trzech sposobów ponumerowania cyklu C_4.