Mako 2 – zestaw 8 (grafy, cz. 2)

Słowo *graf* nadal oznacza **prosty graf nieskierowany**, czyli skończony zbiór punktów zwanych wierzchołkami, oraz łączących niektóre pary wierzchołków linii zwanych krawędziami (bez strzałek, pętli i krawędzi wielokrotnych).

Dwa grafy nazywa się **izomorficznymi**, jeśli (mówiąc prostym językiem) jest to ten sam graf, tylko narysowany na dwa różne sposoby. Sprowadza się to do tego, że te grafy nie tylko mają tyle samo wierzchołków (np. n), ale ponadto można ponumerować wierzchołki każdego z nich w taki sposób, by wierzchołki o określonym numerze były połączone z wierzchołkami o tych samych numerach w obu grafach.

1. Proszę spojrzeć na górną część pliku
`https://pages.mini.pw.edu.pl/~zajacm/mako2/zadania/mako2_1.jpg`
Widzimy tam różne grafy 3−regularne (czyli takie, w których każdy wierzchołek ma stopień 3) o 6 wierzchołkach.

a) Które grafy są izomorficzne (i jak to uzasadnić)?
b) A które nie są (i jak w ogóle pokazuje się nieizomorficzność grafów)?
c) Wykazać, że każdy 3−regularny graf o 6 wierzchołkach jest izomorficzny z którymś z narysowanych.

2. A teraz popatrzmy na dolną część pliku
`https://pages.mini.pw.edu.pl/~zajacm/mako2/zadania/mako2_1.jpg`
Tu z kolei mamy grafy 3−regularne o 10 wierzchołkach.

a) Wykazać, że grafy a)-d) są izomorficzne (w istocie są to różne sposoby narysowania tzw. grafu Petersena).
b) Wykazać, że grafy e) i f) nie są izomorficzne z owym grafem Petersena (czyli z a), b), c) i d)) ani między sobą.

Drzewem nazywamy graf spójny niezawierający cykli, czyli taki, w których z każdego wierzchołka można dojść do każdego innego, ale tylko jedną drogą. Na samej górze strony `https://mathworld.wolfram.com/Tree.html` widzimy wszystkie nieizomorficzne drzewa o najwyżej 6 wierzchołkach.

3. Załóżmy jednak, że wierzchołki drzewa będą rozróżnialne, np. ponumerujemy je kolejnymi liczbami $1, \ldots, n$. Wtedy będziemy mieli nie jedno, lecz trzy różne drzewa o trzech wierzchołkach, a różnią się one tym, który wierzchołek będzie tym środkowym.

a) Wyjaśnić, dlaczego 3, a nie 6, skoro $3! = 6$.
b) Ile jest różnych drzew z czterema rozróżnialnymi wierzchołkami?
c) Ile jest różnych drzew z pięcioma rozróżnialnymi wierzchołkami?
d) Ile jest różnych drzew z sześcioma rozróżnialnymi wierzchołkami?

Odp. b) $12 + 4 = 16 = 4^2$, c) $60 + 60 + 5 = 125 = 5^3$, d) $360 + 360 + 360 + 120 + 6 + 90 = 1296 = 6^4$ (składniki sum to liczby drzew poszczególnych typów, zgodnie z rysunkiem z powyższej strony).