Mako 2 – zestaw 9 (grafy, cz. 3 – drzewa)

1. Ile jest drzew o zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, n\}$, w których

a) wszystkie wierzchołki mają stopień 1 lub 2?

b) istnieje wierzchołek stopnia $n-1$?

c) istnieje wierzchołek stopnia $n-2$?

Niech $T(n,k)$ oznacza liczbę drzew o zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, n\}$, w których stopień wierzchołka o numerze 1 wynosi k.

2. Obliczyć $T(n,k)$ dla małych wartości n (powiedzmy $n \leqslant 5$) i różnych wartości k.

3*. Ogólny wzór ma postać $T(n,k) = \binom{n-2}{k-1} \cdot (n-1)^{n-k-1}$ (dla $1 \leqslant k \leqslant n-1$, bo tylko wtedy problem ma sens). Ktoś by pomyślał, że to bardzo skomplikowany wzór i na pewno trudno go wykazać, ale proszę:

a) sprawdzić, że wyniki zadania 2 zgadzają się z tym wzorem;

b) zauważyć, że $T(n, n-1) = 1$;

c*) wykazać zależność

$$\frac{T(n,k)}{T(n,k+1)} = \frac{(n-1) \cdot k}{n-k-1}$$

analizując, na ile sposobów można dane drzewo, w którym wierzchołek 1 ma dokładnie k sąsiadów, w prosty sposób przerobić na takie, w którym ma on $k+1$ sąsiadów, a na ile sposobów wykonać czynność odwrotną;

d) z b) i c) wyprowadzić ogólny wzór

$$T(n,k) = \binom{n-2}{k-1} \cdot (n-1)^{n-k-1};$$

e*) wywnioskować, że wszystkich drzew o n wierzchołkach jest n^{n-2} (tw. Cayleya).

4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany wierzchołek losowo wybranego drzewa o n wierzchołkach jest liściem? To samo pytanie, ale bez brzydkiego słowa na „p”: ile w sumie liści mają wszystkie drzewa o zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, n\}$?