MAKO 2 – ZESTAW 10

1. Wykazać, że krawędzie każdego grafu 4−regularnego (każdy wierzchołek ma stopień 4) można tak pokolorować na zielono i czerwono, aby z każdego wierzchołka wychodziły dokładnie dwie krawędzie zielone i dwie czerwone.

2. Pokazać na przykładzie, że nieprawdą jest, jakoby krawędzie każdego grafu 4−regularnego można było tak pokolorować na zielono, niebiesko, żółto i czerwono, aby z każdego wierzchołka wychodziły krawędzie we wszystkich czterech kolorach.

   Przypomnienie do dalszych zadań: **Liczba chromatyczna** $\chi(G)$ to najmniejsza możliwa liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania wierzchołków grafu G w taki sposób, by wierzchołki jednego koloru nigdy nie były połączone krawędzią.

3. Ile wynosi liczba chromatyczna **koła** W_n? Koło W_n ma $n+1$ wierzchołków, z których n tworzy cykl, a jeden, zwykle rysowany pośrodku tego cyklu, jest połączony z wszystkimi pozostałymi (ma stopień n).

4. Rozważmy taki graf G: bierzemy wszystkie 8 wierzchołków sześcianu i 12 łączących je krawędzi, po czym dodajemy po jednym wierzchołku w środku każdej ściany, a każdy z nich łączymy z czterema wierzchołkami tej ściany. Uzyskany graf ma więc 14 wierzchołków i 36 krawędzi. Jaka jest jego liczba chromatyczna?

5. Rozwiązać analogiczne zadanie z czworościanem foremnym zamiast sześcianu.

6. Wykazać, że każdy spójny graf G, w którym średni (w sensie śrerdniej arytmetycznej) stopień wierzchołka nie przekracza 2, można pokolorować trzema kolorami (tzn. $\chi(G) \leqslant 3$).
   Pokazać na przykładzie, że istnieje spójny graf G, w którym średni stopień wierzchołka nie przekracza 3 (a nawet 2,001), wymagający do pokolorowania dowolnie wielu kolorów (tzn. $\chi(G)$ może wynosić 2021 albo 10^{100}).

7. Wykazać, że każdy spójny graf $G = (V, E)$, w którym $|E| = |V|+1$, można pokolorować trzema kolorami (tzn. $\chi(G) \leqslant 3$).