dr inż. Mariusz Zając, wydz. MiNI PW, wiosna 2021

Co o szeregach trygonometrycznych (Fouriera) wiedzieć wypada

Wstęp

Będziemy używać strony `https://www.wolframalpha.com` . Proszę najpierw wpisać w okienko polecenie
`plot sin x, sin x+sin(3x)/3, sin x+sin(3x)/3+sin(5x)/5`
(i nacisnąć Enter), następnie
`plot sum sin((2n+1) x)/(2n+1), n=0 to 5`
(jak widać, system ma swoją składnię, która nie jest bardzo sformalizowana, ale przynajmniej lewe i prawe nawiasy powinny się zgadzać) oraz
`sum sin((2n+1) x)/(2n+1), n=0 to 20`
A teraz proszę chwilę poprzyglądać się tym wykresom...

Szeregi trygonometryczne (Fouriera)

Gdybyśmy wzięli nieskończoną sumę

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots + \frac{1}{99}\sin 99x + \ldots$$

to przykład ze wstępu zdaje się sugerować, że otrzymamy coś zwanego sygnałem (przebiegiem) prostokątnym, czyli funkcję

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{dla} \quad x \in \ldots \cup (-2\pi; -\pi) \cup (0; \pi) \cup (2\pi; 3\pi) \cup (4\pi; 5\pi) \cup \ldots \\ -c & \text{dla} \quad x \in \ldots \cup (-3\pi; -2\pi) \cup (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi) \cup (3\pi; 4\pi) \cup \ldots \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots\} \end{cases}$$

gdzie c jest pewną liczbą nieco mniejszą niż 0,8 (co odczytujemy z wykresu).
To wcale niełatwo udowodnić, ale rzeczywiście tak jest, przy czym $c = \frac{\pi}{4}$.
Wiąże się z tym jest kilka problemów ogólniejszej natury, np.:

- jaki **szereg trygonometryczny** – tak nazywamy szeregi typu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ i ich kombinacje – jest zbieżny, a jaki nie (ewentualnie dla jakich wartości x jest zbieżny)?
- O ile zrozumiałe jest, że suma funkcji okresowych jest okresowa, a suma funkcji nieparzystych jest nieparzysta (widzimy to właśnie na powyższym przykładzie sumy sinusów), to jak jest możliwe, żeby suma funkcji ciągłych była nieciągła? Najwyraźniej jest to możliwe, jeśli jest to suma nieskończenie wielu składników.
- Czy zawsze istnieje szereg trygonometryczny, którego suma będzie równa danej funkcji f? Jak praktycznie wyznaczyć jego współczynniki?

Najważniejsze dla nas będzie ostatnie pytanie. Okazuje się mianowicie, że każda funkcja okresowa spełniająca pewne niezbyt silne warunki (zwane warunkami Dirichleta, chętni zajrzą do notatek z wykładu lub znajdą w sieci) jest sumą swojego **szeregu Fouriera** o postaci przedstawionej w pliku
`https://pages.mini.pw.edu.pl/~zajacm/mana/wzory.pdf`

Przykład 1 (sygnał prostokątny). Wyznaczyć szereg Fouriera dla sygnału prostokątnego o okresie 2π, określonego na przedziale $(-\pi;\pi]$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in (0;\pi) \\ -1 & \text{dla} \quad x \in (-\pi;0) \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \{0,\pi\} \end{cases}$$

Rozwiązanie (metoda 1): Obliczmy:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{0} \frac{(-1)\cos nx}{\pi}\,dx + \int_{0}^{\pi}\frac{\cos nx}{\pi}\,dx = \left.\frac{-\sin nx}{\pi n}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{\sin nx}{\pi n}\right|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{-\sin 0 + \sin(-n\pi) + \sin n\pi - \sin 0}{\pi n} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{0} \frac{(-1)\sin nx}{\pi}\,dx + \int_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{\pi}\,dx = \left.\frac{\cos nx}{\pi n}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{-\cos nx}{\pi n}\right|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0}{\pi n} = \frac{2 - 2\cos n\pi}{\pi n} = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{dla} \quad n = 2k+1 \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k \end{cases}$$

(należy tu pamiętać, że $\sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n$ dla całkowitych n). Ale uwaga: to nie jest do końca poprawne rozwiązanie, bo we wzorze na a_n jest n w mianowniku, więc wzór ten nie może obowiązywać dla $n = 0$. W tym przykładzie trzeba więc a_0 policzyć osobno:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0x\,dx = \int_{-\pi}^{0}\frac{-1}{\pi}\,dx + \int_{0}^{\pi}\frac{1}{\pi}\,dx = \left.\frac{-x}{\pi n}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{x}{\pi n}\right|_{0}^{\pi} = \frac{0 - \pi + \pi - 0}{\pi n} = 0$$

A kiedy już policzymy wszystkie współczynniki, możemy napisać szereg:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

Metoda 2: Rachunki można znacznie uprościć dzięki spostrzeżeniu, że funkcja f jest nieparzysta (spełnia $f(-x) = -f(x)$). W tej sytuacji $a_n = 0$ automatycznie (nie trzeba tego specjalnie liczyć), natomiast

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \int_{0}^{\pi}\frac{2\sin nx}{\pi}\,dx = \left.\frac{-2\cos nx}{\pi n}\right|_{0}^{\pi} = \frac{-2\cos n\pi - (-2)}{\pi n}$$

co oczywiście daje ten sam wynik, co poprzednio, ale szybciej.

Przykład 2 (sygnał trójkątny). Wyznaczyć szereg Fouriera dla sygnału trójkątnego o okresie 2π, określonego na przedziale $(-\pi;\pi]$ wzorem $f(x) = |x|$.

Rozwiązanie: Od razu zauważmy, że funkcja f jest parzysta (spełnia $f(-x) = f(x)$). W tej sytuacji $b_n = 0$ automatycznie, natomiast

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \int_0^\pi \frac{2x\cos nx}{\pi}\,dx = \left.\frac{2nx\sin nx + 2\cos nx}{\pi n^2}\right|_0^\pi = \frac{2\cos n\pi - 2}{\pi n^2} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{dla} \quad n = 2k+1 \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k \end{cases}$$

dla $n \neq 0$ (było to całkowanie przez części, szczegóły rachunku pomijam) oraz

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{2x}{\pi}\,dx = \left.\frac{x^2}{\pi}\right|_0^\pi = \frac{\pi^2 - 0}{\pi} = \pi$$

Końcową odpowiedzią będzie teraz szereg

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n\cos nx + b_n \sin nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$

Jeśli ktoś chce przeczytać to samo, ale trochę inaczej, oraz zobaczyć dodatkowo rozwinięcie przebiegu piłozębnego[1], to zapraszam do obejrzenia materiału pani prof. Jurlewicz z Politechniki Wrocławskiej: `https://tiny.pl/tzn2g`

W zasadzie każde zadanie polegające na rozwinięciu konkretnej funkcji w szereg Fouriera sprowadza się do zastosowania wzorów z pliku `https://pages.mini.pw.edu.pl/~zajacm/mana/wzory.pdf` i policzeniu kilku całek, czy to ręcznie, czy na komputerze. Poniższy przykład nie jest dokładnie tożsamy z żadnym zadaniem z zestawu `z08`, ale jest bardzo podobny do kilku z nich.

Zadanie. Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji $f(x) = \sin x + |\sin x|$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że funkcja f ma okres 2π, bo sinus i cosinus mają taki okres (co prawda najmniejszym dodatnim okresem funkcji $|\sin x|$, czyli jej okresem podstawowym, jest π, ale to nie jest bardzo istotne, bo jeśli π jest okresem, to 2π również).

Ponadto funkcja f sama nie jest parzysta ani nieparzysta, ale jest sumą nieparzystej funkcji $\sin x$ i parzystej funkcji $|\sin x|$. Można teraz osobno napisać szereg dla każdego składnika i dodać wyniki.

Szeregiem Fouriera funkcji $\sin x$ jest $\sin x$ (ktoś powiedziałby, że $\sin x$ to nie szereg, ale owszem:

$$\sin x = 0 + 0\cdot\cos x + 1\cdot\sin x + 0\cdot\cos 2x + 0\cdot\sin 2x + 0\cdot\cos 3x + 0\cdot\sin 3x + \dots$$

a więc jest to szereg, w którym wszystkie wyrazy poza jednym są równe 0.).

Szeregu Fouriera funkcji $|\sin x|$ nie wypiszemy tak od razu, ale z całą pewnością jest to szereg cosinusowy (tzn. sinusy w nim w ogóle nie występują), bo $|\sin x|$ jest funkcją parzystą. Wzór jest taki

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx,$$

[1] już chyba nikt tak nie mówi, ale to zabawne słowo

gdzie

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin x| \cdot \cos nx \, dx.$$

Teraz wpiszmy do Wolfram Alpha `integral from 0 to pi of |sin x| cos nx` , by uzyskać wynik

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(\pi n)+1}{1-n^2} = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{dla} \quad n = 2k \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Ale uwaga: we wzorze na a_n mamy $1-n^2$ w mianowniku, czyli wzór ten nie obowiązuje dla $n = 1$. Współczynnik a_1 trzeba policzyć osobno:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin x| \cdot \cos x \, dx = 0.$$

(niby wyszło 0, tak jak poprzednio, ale pominięcie tego rachunku byłoby usterką).

Nie trzeba natomiast osobno liczyć a_0, bo wzór $a_n = \frac{4}{\pi(1-n^2)}$ dla $n = 2k$ obejmuje przypadek $a_0 = \frac{4}{\pi}$.

Ostatecznie więc:

$$|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos 2kx =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \dots\right)$$

i wreszcie

$$\sin x + |\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sin x - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \dots\right).$$

A jak poradzić sobie bez komputera? Otóż

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin x| \cdot \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cdot \cos nx \, dx,$$

(bo sinus jest dodatni między 0 a π), a

$$\sin x \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin((1-n)x) + \sin((1+n)x))$$

(wzór na zamianę iloczynu funkcji trygonometrycznych na sumę też jest w pliku `wzory.pdf`). Dzięki powyższej zamianie całkowanie będzie już proste.