Uwaga ogólna: by rozwiązać równanie lub układ równań różniczkowych metodą Laplace'a, trzeba korzystać z kilku wzorów, z których niektóre są dość oczywiste, np.

$$\mathcal{L}[ax(t)+by(t)] = a\mathcal{L}[x(t)] + b\mathcal{L}[y(t)],$$

inne lepiej sobie zapisać na kartce z wzorami, np.

$$\mathcal{L}[x'(t)] = s\mathcal{L}[x(t)] - x(0),\ \ \mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},$$

a jeszcze inne wynikają z powyższych, np.

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s\mathcal{L}[x'(t)] - x'(0),\ \ \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a},$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}},\ \ \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s},\ \ \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$$

Zadanie: Używając przekształcenia Laplace'a rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) + 2e^t \\ y'(t) &= x(t) - t \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $x(0) = y(0) = 1$.

Rozwiązanie: Stosujemy przekształcenie Laplace'a do obydwu równań:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x'(t)] &= \mathcal{L}[y(t)+2e^t] &= \mathcal{L}[y(t)] + 2\mathcal{L}[e^t] \\ \mathcal{L}[y'(t)] &= \mathcal{L}[x(t)-t] &= \mathcal{L}[x(t)] - \mathcal{L}[t] \end{cases}$$

Daje to (przy oznaczeniu $\overline{x}(s) = \mathcal{L}[x(t)], \overline{y}(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ oraz po użyciu odpowiednich wzorów):

$$\begin{cases} s\overline{x}(s) - 1 &= \overline{y}(s) + \frac{2}{s-1} \\ s\overline{y}(s) - 1 &= \overline{x}(s) - \frac{1}{s^2} \end{cases}$$

Teraz trzeba dowolną metodą rozwiązać ten układ równań, a co najmniej wyznaczyć jedną z niewiadomych $\overline{x}(s)$ lub $\overline{y}(s)$. Podstawmy więc obliczone z pierwszego równania

$$\overline{y}(s) = s\overline{x}(s) - 1 - \frac{2}{s-1}$$

do drugiego:

$$s^2\overline{x}(s) - s - \frac{2s}{s-1} - 1 = \overline{x}(s) - \frac{1}{s^2}.$$

Stąd:

$$(s^2-1)\overline{x}(s) = s + 1 + \frac{2s}{s-1} - \frac{1}{s^2}$$

$$\overline{x}(s) = \frac{s+1}{s^2-1} + \frac{2s}{(s-1)(s^2-1)} - \frac{1}{s^2(s^2-1)}.$$

Teraz rozłożymy powyższe funkcje wymierne na ułamki proste:

$$\frac{s+1}{s^2-1} = \frac{1}{s-1},$$

$$\frac{2s}{(s-1)(s^2-1)} = \frac{2s}{(s-1)^2(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1},$$

$$-\frac{1}{s^2(s^2-1)} = -\frac{1}{s^2(s-1)(s+1)} = \frac{D}{s} + \frac{E}{s^2} + \frac{F}{s-1} + \frac{G}{s+1}.$$

Po niezbyt trudnych, choć zajmujących pewien czas, rachunkach (odsyłam do notatek z pierwszego semestru, hasło „rozkład na ułamki proste") wyliczymy współczynniki:

$$\frac{2s}{(s-1)(s^2-1)} = \frac{1/2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1/2}{s+1},$$

$$-\frac{1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1/2}{s-1} + \frac{1/2}{s+1},$$

czyli ostatecznie

$$\overline{x}(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2s}{(s-1)(s^2-1)} - \frac{1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s^2}.$$

Teraz pozostaje tylko odwrócić przekształcenie Laplace'a korzystając ponownie ze wzorów z kartki. Równość

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

daje w szczególności

$$\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}, \;\; \mathcal{L}[te^t] = \frac{1}{(s-1)^2}, \;\; \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2},$$

czyli

$$\mathcal{L}[x(t)] = \overline{x}(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s^2} = \mathcal{L}[e^t + te^t + t].$$

Mamy więc ostatecznie

$$x(t) = e^t + te^t + t.$$

Niewiadomą $y(t)$ moglibyśmy w zasadzie obliczyć analogicznie, ale musielibyśmy znów wykonać sporo rachunków. Tymczasem z pierwszego z wyjściowych równań znajdujemy od razu

$$y(t) = x'(t) - 2e^t = (e^t + te^t + t)' - 2e^t = e^t + e^t + te^t + 1 - 2e^t = te^t + 1.$$

Odpowiedź:

$$\begin{cases} x(t) &= (t+1)e^t + t, \\ y(t) &= te^t + 1. \end{cases}$$

Zadania egzaminacyjne ze względu na ograniczony czas wymagają krótszych rachunków, ale zasada jest ta sama.