dr inż. Mariusz Zając, wydz. MiNI PW, wiosna 2020

Całki podwójne – cz. 3, zamiany zmiennych ciąg dalszy

Przedstawię inne rozwiązanie zadania z
https://www.youtube.com/watch?v=DqlmHa9uwhc

Zad. Obliczyć $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ po obszarze $D = \{(x,y) : x^2+x+y^2 \leqslant 0\}$.

Zauważmy najpierw, że nierówność definiującą D można też zapisać jako $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2$, co znaczy, że D jest kołem o środku $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ i promieniu $\frac{1}{2}$.

Do tej pory jest tak, jak w filmie, ale teraz wprowadzę zmienną $t = x + \frac{1}{2}$. Wtedy $dx = dt$, $x = t - \frac{1}{2}$ i nasza całka przybiera postać:

$$I = \iint_D \left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2\right) dtdy = \iint_D \left(t^2 - t + \frac{1}{4} + y^2\right) dtdy$$

a obszar całkowania to $D' = \{(t,y) : t^2+y^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2\}$

Podstawmy teraz współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} t &= r\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

Mamy $r^2 = t^2 + y^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2$, więc $r \in [0; \frac{1}{2}]$, oraz $\varphi \in [0; 2\pi]$, bo na zmienną φ nie jest nałożony żaden warunek (rozważamy całe koło). Pamiętamy też o jakobianie $J = r$, tzn. $dtdy = r\,drd\varphi$. Nasza całka wynosi teraz

$$I = \iint_D \left(t^2 + y^2 - t + \frac{1}{4}\right) dtdy = \int_{r=0}^{\frac{1}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(r^2 - r\cdot\cos\varphi + \frac{1}{4}\right)\cdot r\,drd\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(r^3 - r^2\cdot\cos\varphi + \frac{r}{4}\right) d\varphi\right) dr = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[r^3\varphi - r^2\cdot\sin\varphi + \frac{r\varphi}{4}\right]_{\varphi=0}^{2\pi} dr =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2\pi r^3 + \frac{\pi r}{2}\right) dr = \left[\frac{\pi r^4}{2} + \frac{\pi r^2}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \pi\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{16}\right) = \frac{3\pi}{32}.$$