

1. a) Wyznaczyć (jeśli istnieją) ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - 3x - 2y$.
ODP. jedno minimum $f(2, 1) = -4$
b) Obliczyć najmniejszą i największą wartość tej samej funkcji w domkniętym (czyli wziętym razem z bokami i wierzchołkami) kwadracie o wierzchołkach $(0,0), (3,0), (3,3), (0,3)$.
ODP. $f(2, 1) = -4, f(0, 3) = 12$

2. Obliczyć całkę funkcji $f(x, y) = xy$ po pięciokącie o kolejnych wierzchołkach $(0,0), (4,2), (1,2), (1,1), (0,1)$. ODP. $\frac{29}{4}$

3. Obliczyć objętość zbioru

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 \leq y - 3 \leq (2 + z)(2 - z)\}.$$

ODP. 8π

4. Rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = 0$ funkcję

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2x - 3}$$

i obliczyć $f^{(21)}(0)$. ODP. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((- \frac{1}{3})^n - 1\right) x^n$, $f^{(21)}(0) = -\frac{21!}{3^{21}} - 21!$

5. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x)$ równą $\sin 2x + |x| - 1$ w przedziale $(-\pi, \pi)$ i mającą okres 2π .

$$\text{ODP. } f(x) = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{4}{\pi} \cos x + \sin 2x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x - \frac{4}{25\pi} \cos 5x - \dots$$

6. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} y'(x) - x \cdot y(x) &= 3x \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

$$\text{ODP. } f(x) = 5e^{\frac{x^2}{2}} - 3$$