PRZYKŁADOWY EGZAMIN Z MANA (5*12 PKT.) 20.06.2021 R.

UWAGA: NALEŻY ROZWIĄZAĆ 5 WYBRANYCH ZADAŃ

1. a) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 3x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$.

   b) Obliczyć najmniejszą i największą wartość tej samej funkcji w domkniętym (czyli wziętym razem z bokami i wierzchołkami) kwadracie o wierzchołkach (0,0),(1,0),(1,1),(0,1).

2. Obliczyć całkę funkcji $f(x,y) = x^2 \cdot \sin(x^2 + y^2)$ po zbiorze

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9 \wedge y \geqslant 0\}.$$

3. Obliczyć objętość zbioru $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : a+2|x| \leqslant y \leqslant 8-|z|\}$ w zależności od parametru $a \in \mathbf{R}$. Uwaga: objętość zbioru pustego to oczywiście 0.

4. Zbadać, dla jakich $x \in \mathbf{R}$ zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n3^n - 2^n}.$$

5. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x)$ równą $\cos 2x + \pi - x$ w przedziale $(0, 2\pi)$ i mającą okres 2π.

6. Używając przekształcenia Laplace'a znaleźć rozwiązanie równania $x''(t) - x(t) = 1$ z warunkami początkowymi $x(0) = 2, x'(0) = 1$.
   Uwaga: Kto rozwiąże to zadanie inną metodą, może uzyskać do 9 punktów. Kto dokładnie rozwiąże je dwiema metodami (jedną z użyciem prz. Laplace'a, drugą bez), może uzyskać do 18 punktów.