Analiza matematyczna (MANA), zestaw 1

1. **Poziomicą** funkcji $f(x, y)$ nazywamy zbiór rozwiązań równania $f(x, y) = c$ dla dowolnego ustalonego c. Na przykład poziomice funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ są okręgami.
   Opisać/naszkicować poziomice następujących funkcji:
   a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$
   b) $f(x, y) = xy$
   c) $f(x, y) = xy + x - 2y$
   d) $f(x, y) = x^2 - y^2$
   e) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$
   f*) $f(x, y) = x^2 + a \cdot xy + y^2$ w zależności od parametru a
   g) $f(x, y) = |x| + |y|$
   h) $f(x, y) = |x| - |y|$
   i) $f(x, y) = |x| + y^2$
   j) $f(x, y) = x^{2022} + y^{2022}$ (dlaczego z 2021 byłoby trudniej?)

2. W miarę możliwości, być może przy pomocy komputera, narysować trójwymiarowe wykresy, czyli powierzchnie $z = f(x, y)$ powyższych funkcji.

3. Na wszelki wypadek przypomnę, że rozważamy tylko liczby rzeczywiste.

   a) Dla jakich liczb x i y spełniających warunek $x + y = 2021$ iloczyn xy przyjmuje największą wartość?

   b) Dla jakich dodatnich liczb x, y, z i u spełniających warunek $x + y + z + u = 2021$ iloczyn $xyzu$ przyjmuje największą wartość?

   c) Jakie znaczenie ma fakt, że w punkcie b) pojawiło się słowo „dodatnie", którego nie ma w punkcie a)?

   d*) Jakie znamy ogólne twierdzenie, którego szczególnymi przypadkami są powyższe pukty a) i b)?

4. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 \geqslant -1.$$