Analiza matematyczna (MANA), zestaw 2

1. Obliczyć pierwsze i drugie pochodne cząstkowe oraz zweryfikować prawdziwość tw. Schwarza o równości pochodnych mieszanych dla poniższych funkcji:

   a) $f(x,y) = \sqrt{x^3 y}$

   b) $f(x,y) = (x+y+1)^{2021}$

   c) $f(x,y) = \sin\left(\frac{x^2}{y}\right)$

   d) $f(x,y) =$ Państwa ulubiona funkcja

2. Obliczyć
$$\frac{\partial^{126}}{\partial x^{46}\partial y^{27}\partial z^{53}}\left[(x+2y-z)^{126}\right]$$

3. Wykazać, że każda funkcja postaci $f(x,y) = g(x+y)$, np. $f(x,y) = \ln(\operatorname{tg}(x+y-1))$ spełnia równanie
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$
(tu i poniżej zakładamy, że te wyrażenia mają sens, a w szczególności że punkt (x,y) należy do odpowiedniej dziedziny, a funkcja g, a wraz z nią i f, ma pochodną).

4. Wykazać, że każda z poniższych funkcji:

   a) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

   b) $f(x,y) = e^x \cdot \cos y$

   c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

   spełnia równanie
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} = 0$$

5. Wykazać, że każda funkcja postaci $f(x,y) = g(x+y) + h(x-y)$, np. $f(x,y) = e^x e^y + \cos(\ln(x^2 - 2xy + y^2 - 1))$ spełnia równanie
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f^2}{\partial y^2}$$