

ANALIZA MATEMATYCZNA (MANA), ZESTAW 4

1. Obliczyć następujące całki i zauważyć, że są one (parami) równe:

a)

$$\int_0^1 \left( \int_1^2 \frac{y}{x} dx \right) dy \text{ oraz } \int_1^2 \left( \int_0^1 \frac{y}{x} dy \right) dx$$

b)

$$\int_0^1 \left( \int_0^2 (x^3 + xy^2) dx \right) dy \text{ oraz } \int_0^2 \left( \int_0^1 (x^3 + xy^2) dy \right) dx$$

c)

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{-2}^2 (x+y)^{2020} dx \right) dy \text{ oraz } \int_{-2}^2 \left( \int_{-1}^1 (x+y)^{2020} dy \right) dx$$

d)\*

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-y} x^2 y dx \right) dy \text{ oraz } \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} x^2 y dy \right) dx$$

e)\*

$$\int_0^1 \left( \int_1^{2-y} \frac{y}{x} dx \right) dy \text{ oraz } \int_1^2 \left( \int_0^{2-x} \frac{y}{x} dy \right) dx$$

2. Obliczyć średnią wartość funkcji  $f(x, y) = (x + y)^{-3}$  na kwadracie  $Q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2 \leq x \leq 4 \wedge 3 \leq y \leq 5\}$

3. Niech  $\min(a, b)$  oznacza mniejszą z liczb  $a$  i  $b$ .

a) Obliczyć wartość całki  $\int_0^1 \min(x, a) dx$  w zależności od parametru  $a$

b) Obliczyć

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \min(x, y) dx \right) dy$$

c) Uzasadnić, że powyższa całka jest objętością pewnego ostrosłupa. Czy uzyskany w punkcie b) wynik jest zgodny z oczekiwaniami?