Analiza matematyczna (MANA), zestaw 7

1. Rozważyć nieskończoną sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

Obliczyć sumę dwóch, trzech, czterech oraz (przy pomocy komputera) stu lub tysiąca pierwszych jej składników. Czy można postawić hipotezę, do czego zbieżny jest ciąg tych sum? Czy można ją łatwo udowodnić?

2. Rozważyć te same pytania dla sumy

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \dots$$

3. * Rozważyć te same pytania dla sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \dots$$

4. Zbadać, dla jakich $x \in \mathbf{R}$ zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(x^2+1)^n}.$$

5. Wykazać, że szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ jest szeregiem Taylora funkcji $f(x) = 1/(1-x)$ w otoczeniu punktu $x_0 = 0$. Jaką postać ma szereg Taylora tej funkcji w otoczeniu punktu $x_0 = 2$? Jaką postać ma szereg Taylora funkcji $g(x) = 1/(1-2x)$ w otoczeniu punktu $x_0 = 0$?

6. Korzystając z wyniku poprzedniego zadania, wyznaczyć szeregi Taylora funkcji $g(x) = 1/(1-x)^2$ oraz $h(x) = \ln(1-x)$ w otoczeniu punktu $x_0 = 0$. Obliczyć następnie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \text{ i } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

7. Rozwinąć w szereg potęgowy w otoczeniu punktu 0 funkcje:

   $f(x) = x^2 e^{-3x}$
   $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$
   $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$

8. Przedstawić funkcję

$$f(x) = \frac{x^7 + x^4}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

w postaci sumy odpowiedniego szeregu potęgowego, a następnie na tej podstawie obliczyć $f^{(8)}(0)$ i $f^{(2021)}(0)$.