Analiza matematyczna (MANA), zestaw 9

W tym zestawie zajmiemy się przekształceniami Fouriera:

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

i Laplace'a

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \bar{f}(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

1. Na wykładzie obliczyliśmy, że transformatą Fouriera funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

jest $\hat{f}(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}$. Ile więc wyniesie transformata Fouriera funkcji

$$g(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla} \quad |x| \leqslant 5 \\ 0 & \text{dla} \quad |x| > 5 \end{cases},$$

a ile funkcji

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0 \vee x > 2 \end{cases} ?$$

2. Wykazać, że jeśli $f(t)$ jest funkcją parzystą, to $\hat{f}(\omega)$ jest liczbą rzeczywistą dla każdego rzeczywistego ω.

3. Obliczyć $\mathcal{L}[t^2e^{2t}]$ korzystając bezpośrednio z definicji przekształcenia Laplace'a.

4. Wiedząc, że

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d\mathcal{L}[f(t)](s)}{ds},$$

udowodnić, że

$$\mathcal{L}[t^nf(t)](s) = (-1)^n\frac{d^n\mathcal{L}[f(t)](s)}{ds^n}.$$

Na tej podstawie wykazać, że

$$\mathcal{L}[t^ne^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},$$

oraz obliczyć $\mathcal{L}[t\cos t], \mathcal{L}[t\sin t], \mathcal{L}[t^2\cos t]$.

W ostatnim zadaniu będziemy szukali funkcji mając daną jej transformatę Laplace'a (nazywamy to znajdowaniem transformaty odwrotnej).

5. Obliczyć następujące odwrotne transformaty Laplace'a:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{s^2+2s}], \mathcal{L}^{-1}[\frac{s^2}{s^3-7s+6}], \mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^3-s^2-s+1}],$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^4+5s^2+4}], \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^5-s^3}], \mathcal{L}^{-1}[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}].$$