1 Rachunek zdań

1.1 Formuły rachunku zdań

Definicja 1 *Formuły rachunku zdań budujemy ze zmiennych zdaniowych i spójników logicznych (funktorów zdaniotwórczych): fałszu $\bot$, prawdy $\top$, negacji $\neg$, koniunkcji $\wedge$, alternatywy $\vee$, implikacji $\rightarrow$ i równoważności $\leftrightarrow$, w następujący sposób:*

1. Symbole $\bot$ i $\top$ są formułami rachunku zdań.

2. Każda zmienna zdaniowa jest formułą rachunku zdań.

3. Jeżeli ϕ, ϕ_1 i ϕ_2 są formułami rachunku zdań, to są nimi także: $\neg\phi, (\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \rightarrow \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$.

4. Wszystkie formuły rachunku zdań można zbudować przy pomocy reguł opisanych w punktach 1–3.

Zmienne zdaniowe będziemy oznaczać literami: p, q, r, s itd., często z indeksami: p_1, p_2 itd. Formuły zdaniowe będziemy oznaczać literami: ϕ, ψ, ρ itd., często również z indeksami: ϕ_1, ϕ_2 itd. Dla większej czytelności będziemy w formułach opuszczać często nawiasy, zakładajac następującą kolejność wiązania (od najsilniejszego do najsłabszego): $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, przyjmując, że $\wedge, \vee$ i $\leftrightarrow$ łącza w lewo tj. np. $p \vee r \vee s$ oznacza $(p \vee r) \vee s$. Natomiast $\leftrightarrow$ łączy w prawo ($p \rightarrow r \rightarrow s$ oznacza $p \rightarrow (r \rightarrow s)$). Stąd $p \vee q \vee r \wedge s$ oznacza $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$

Definicja 2 *Wartościami logicznymi nazywamy symbole* 0 *i* 1*, które interpretujemy jako fałsz i prawdę. Na zbiorze wartości logicznych $\{0, 1\}$ określamy działania $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ w następujący sposób:*

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$	$\neg X$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Definicja 3 *Waluacją nazywamy dowolny ciąg $\sigma := (w_1, w_2, \ldots)$ wartości logicznych.*

Definicja 4 *Niech σ będzie waluacją i niech $p_1, p_2, \ldots$ będą zmiennymi zdaniowymi. Dla dowolnej zmiennej p_i niech $\sigma(p_i) = w_i$ oraz, jeśli ϕ, ψ są zdaniami i określone są już wartości $\sigma(\phi), \sigma(\psi)$, to*

1. $\sigma(\top) = 1$,

2. $\sigma(\bot) = 0$,

3. $\sigma(\phi \wedge \psi) = \sigma(\phi) \wedge \sigma(\psi)$,

4. $\sigma(\phi \vee \psi) = \sigma(\phi) \vee \sigma(\psi)$,

5. $\sigma(\phi \rightarrow \psi) = \sigma(\phi) \rightarrow \sigma(\psi)$,

6. $\sigma(\phi \leftrightarrow \psi) = \sigma(\phi) \leftrightarrow \sigma(\psi)$,

7. $\sigma(\neg\phi) = \neg\sigma(\phi)$.

UWAGA: Dla waluacji $\sigma = (w_1, w_2, ...)$ i formuły $\psi = \psi(p_{1,2}, ..., _n)$, przez $\overline{\psi}$ oznaczamy wyrażenie w którym w miejsce $p_1, p_2, ..., p_n$ wstawiamy odpowiednio w_1, w_2, aż do w_n.

Przykład 5 *Niech $\sigma = (1, 0, 0, 1, 0, 0, ...)$ i niech $\phi = (p_2 \vee p_1) \wedge p_4$. Wtedy $\sigma(\phi) = ...$*

Definicja 6 *Formuła jest: (i) spełniona przy danym wartościowaniu zmiennych, jeżeli przy tym wartościowaniu ma ona wartość $\top$;*

(ii) spełnialna, jeżeli istnieje wartościowanie zmiennych, dla którego ta formuła jest spełniona;

(iii) prawdziwa (jest tautologią), jeśli jest spełniona dla każdego wartościowania zmiennych;

(iv) sprzeczna, jeśli nie jest spełniona (ma wartość $\perp$) dla żadnego wartościowania zmiennych.

Przykład 7 *(Skrócona metoda zerojedynkowa) Rozważmy formułę*

$$\phi = (\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to q).$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to \neg q$	$\neg p \to q$	$(\neg p \to q) \to q$	ϕ
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0

Przegląd najważniejszych tautologii

Używamy dla uproszczenia liter $p, q, r, ...$ zamiast $p_1, p_2, ...$

(i) idempotentność: $(p \wedge p) \leftrightarrow p$, $(p \vee p) \leftrightarrow p$
(ii) przemienność: $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$, $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
(iii) łaczność: $(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r), (p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$
(iv) rozdzielność: $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(v) podwójna negacja: $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$
(vi) prawo wyłaczonego środka: $\neg(p \wedge \neg p)$
(vii) brak trzeciej możliwości: $p \vee \neg p$
(viii) prawa de Morgana: $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
(ix) przechodniość implikacji: $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
(x) eliminacja implikacji: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
(xi) eliminacja równoważności: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$,
$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$

Definicja 8 *Podstawieniem formuły ψ w miejsce zmiennej zdaniowej p nazywamy przekszatałcenie, które formule ϕ przyporządkowuje formułę powstałą przez wstawienie formuły ψ w każde miejsce wystąpienie zmiennej p w formule ϕ. Formalnie:*

$p[p/\psi] = \psi$

$q[p/\psi] = q$, *dla* $q \neq p$
$(\neg\phi)[p/\psi] = \neg(\phi[p/\psi])$
$(\phi_1 \vee \phi_2)[p/\psi] = (\phi_1[p/\psi]) \vee (\phi_2[p/\psi])$
$(\phi_1 \wedge \phi_2)[p/\psi] = (\phi_1[p/\psi]) \wedge (\phi_2[p/\psi])$
$(\phi_1 \to \phi_2)[p/\psi] = (\phi_1[p/\psi]) \to (\phi_2[p/\psi])$
$(\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)[p/\psi] = (\phi_1[p/\psi]) \leftrightarrow (\phi_2[p/\psi])$

Przykład 9

$$(p \to p \wedge q)[p/q \to p] = (q \to p) \to (q \to p) \wedge q.$$

W podobny sposób definiojemy podstawienie formuł w miejsce kilku zmiennych.

Lemat 10 *(Lemat o podstawieniu) Jeżeli formuła ϕ jest tautologią, to dla dowolnej zmiennej p i dowolnej fomuły ψ formuła $\phi[p/\psi]$ jest tautologią.*

Dowód. Niech $\phi = \phi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ oraz niech i będzie takie, że $p = p_i$. Dla dowolnej waluacji σ niech σ_ψ oznacza waluację dla której $w_i = \sigma(\psi)$ oraz dla $j \neq i$ niech odpowiedni element w ciągu σ_ψ będzie równy w_j.
mamy $\sigma(\phi[p/\psi]) = \overline{\phi}(w_1, \ldots, w_{i-1}, \sigma(\psi), w_{i+1}, \ldots, w_n) = \sigma_\psi(\phi) = 1.$■

1.2 Reguły wnioskowania

Definicja 11 *Powiemy, że zdanie φ wynika ze zdań $\psi_1, \ldots, \psi_n$ (zapisujemy $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \models \varphi$) jeśli dla dowolnej waluacji σ takiej, że $\sigma(\psi_1) = ... = \sigma(\psi_n) = 1$ mamy $\sigma(\varphi) = 1$*
Wyrażenie postaci $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \models \varphi$ które są prawdziwe nazywamy regułami wnioskowania

Twierdzenie 12 *Następujące sformułowania są równoważne:*
1. $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \models \varphi$
2. $(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_n) \to \varphi$

Dowód: (1) $\to$ (2): Zakładamy, że $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \models \varphi$. Musimy pokazać, że $(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_n) \to \varphi$ jest tautologią. Rozważmy zatem dowolną waluację σ $\sigma((\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_n) \to \varphi) = (\sigma(\psi_1) \wedge ... \wedge \sigma(\psi_n)) \to \sigma(\varphi)$. Jeśli $\sigma(\psi_1) = ... = \sigma(\psi_n) = 1$, to z założenia $\sigma(\varphi) = 1$ co kończy tę część dowodu.

(2) $\to$ (1): Zakładamy, że $(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_n) \to \varphi$ jest tautologią oraz rozważamy dowolną waluację dla której $\sigma(\psi_1) = ... = \sigma(\psi_n) = 1$. Punkt 2. otrzymujemy korzystając z operatora $\to$.■

Twierdzenie 13 *Pewne reguły wnioskowania:*
(i) $\{p\} \models p$
(ii) $\{p, \neg p\} \models q$
(iii) $\{p, q\} \models p \wedge q$
(iv) $\{p \wedge q\} \models p$
(v) $\{p, p \to q\} \models q$ *(modus ponens)*
(vi) $\{p \to q, \neg q\} \models \neg p$ *(modus tollens)*
(v) $\{p \vee q, \neg p \vee q\} \models q$

Dowody wprost:

Polegają na pokazaniu, że z założeń twierdzenia wynika jego teza

Przykład: Jeśli $a > 0, b > 0$ oraz $a^2 + b^2 > 3$, to $(a+b)^2 > 3$

Dowody nie wprost:

Wykorzystujemy tautologię $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$ lub jeśli ktoś woli regułę $\{\neg q \to \neg p\} \models p \to q$. Czyli fałszywość tezy pociąga fałszywość założenia

Przykład: Jeśli 2 nie dzieli sumy dwóch liczb naturalnych, to przynajmniej jedna z tych liczb jest nieparzysta.

Dowody przez sprowadzenie do sprzeczności

Reguła opiera się na tautologii $((\psi \wedge \neg\varphi) \to \bot) \to (\psi \to \varphi)$

Przykład: Jeśli $x^2 = 3$, to x nie jest liczbą wymierną. Korzystając z reguły rozważanej trzeba pokazać, że założenie "$x^2 = 3$ i x jest liczbą wymierną" prowadzi do sprzeczności.

Dowody przez rozważenie przypadków

$\{p \to q, \neg p \to q\} \models q$

Przykład: Dla dowolnej liczb rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x \leqslant |x|$