Nieprzemienne struktury algebraiczne i ich zastosowania. Zestaw 1.

1. Przypuśćmy, że element a w pierścieniu R ma odwrotność prawostronną a nie ma lewostronnej. Pokaż, że wówczas a ma nieskończenie wiele różnych odwrotności prawostronnych.
2. Wyznacz centrum pierścienia $M_n(R)$ gdzie R jest dowolnym pierścieniem.
3. Niech $A = \mathbb{C}[x, \sigma]$, gdzie σ oznacza sprzężenie na $\mathbb{C}$. Pokaż, że:
   (a) $Z(A) = R[x^2]$
   (b) $A/A\cdot(x^2+1)$ jest izomorficzny z $\mathbb{C}+\mathbb{C}j$ (podpierścień kwaternionóW)
   (c) $A/A \cdot (x^4 + 1)$ jest izomorficzny z $M_2(\mathbb{C})$.
4. Niech R będzie dziedziną. Jeśli R ma minimalny lewostronny ideał, to R jest pierścieniem z dzieleniam.
5. Niech R będzie pierścieniem równym $A = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{2^k} & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$ gdzie $k \geqslant 2$. Wyznacz zbiór N wszytkich elementów nilpotentnych R
6. Niech m i m' będą maksymalnymi prawostronnymi ideałami pierścienia R. Pokaż, że proste prawostronne R moduły R/m i R/m' są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $r \in R \setminus m$ takie, że $rm' \subseteq m$. Pokaż, że w takiej sytuacji m i m' zawierają jednakowe ideały pierścienia R.
7. Let $R = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ gdzie B_i są ideałami R. Pokaż, że każdy lewostronny (ideał) ideał I ma postać $I = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ gdzie I_j są lewostronnymi (ideałami) ideałami B_i.